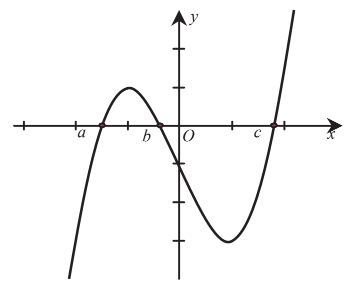
PHẦN II. NỘI DUNG CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. CƠ SỞ LÍ LUẬN CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.

2.1.1. Sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục hoành.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với trục hoành là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f\left(x\right)=0$.



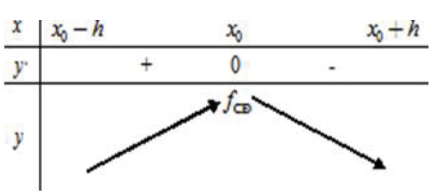
Ví dụ minh hoạ:

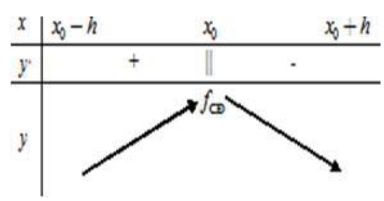
Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.

Suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm $\left(x=a;x=b;x=c\right)$

2.1.2. Dấu hiệu nhận biết điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số bằng bảng biến thiên.

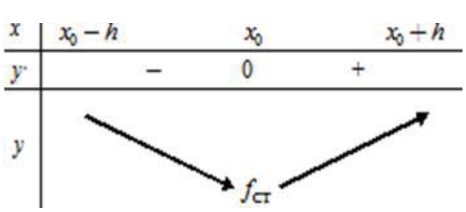
Bảng 1:

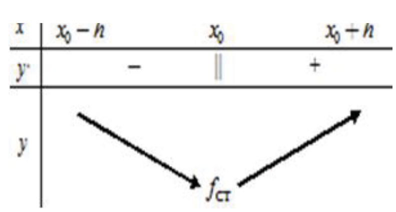




Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm $x=x_0$.

Bảng 2:

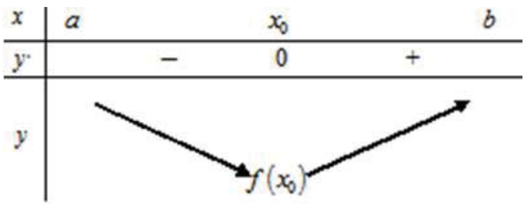


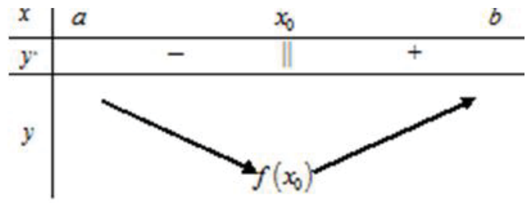


Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=x_0$.

2.1.3. Dấu hiệu nhận biết giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số bằng bảng biến thiên.

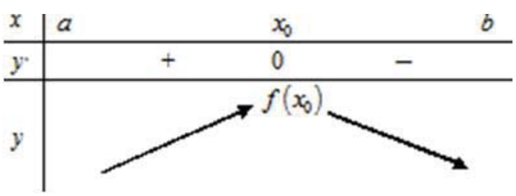
Bảng 3:

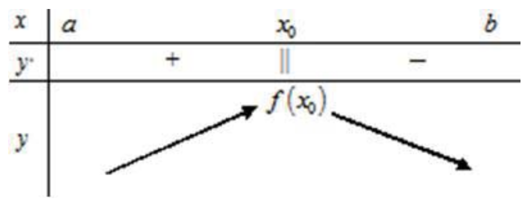




Ta có: $\min\limits_{[a;b]} y = f\left(x_0\right)$.

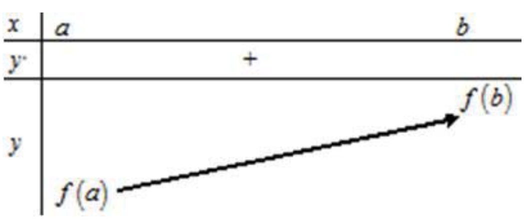
Bảng 4:





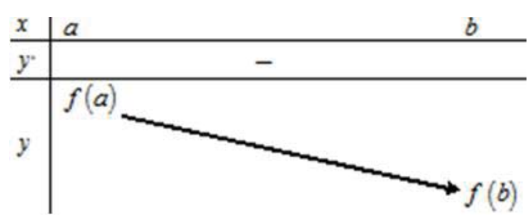
Ta có: $\max\limits_{[a;b]} y = f\left(x_0\right)$.

Bảng 5:



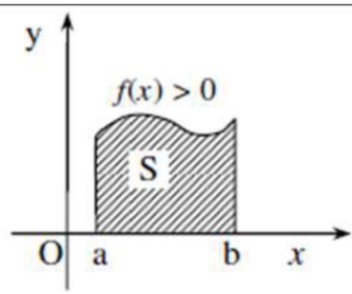
Ta có: $\min\limits_{[a;b]} y = f\left(a\right); \max\limits_{[a;b]} y = f\left(b\right)$.

Bảng 6:

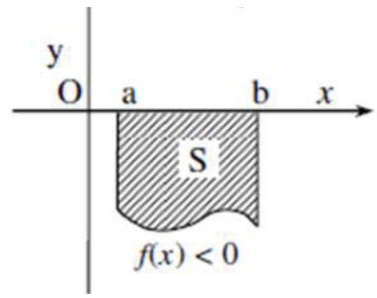


Ta có: $\min\limits_{[a;b]} y = f\left(b\right); \max\limits_{[a;b]} y = f\left(a\right)$.

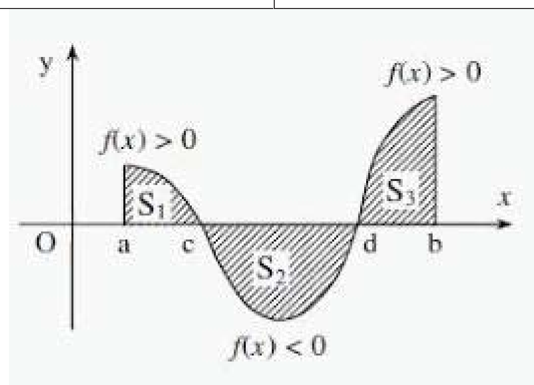
2.1.4. Xét dấu của tích phân xác định khi biết giới hạn miền phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số dưới dấu tích phân, trục hoành và hai đường thẳng $x = a; x = b\left(a < b\right)$**.**



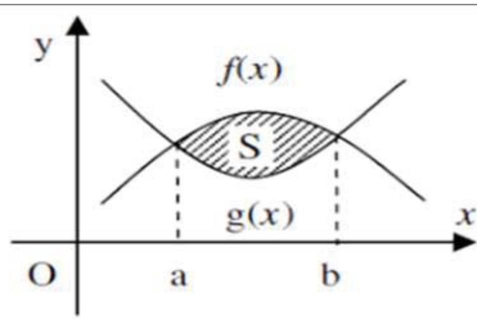
$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$



$$\int_a^b f(x)dx < 0.$$



$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3.$$



$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx > 0 \qquad \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx < 0$$

2.1.5. $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$

2.1.6. Phép biến đổi đồ thị.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị (C). Khi đó, với số $a>0$ ta có:

- Hàm số $y=f\left(x\right)+a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.
- Hàm số $y=f\left(x\right)-a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
- Hàm số $y=f\left(x+a\right)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
- Hàm số $y=f\left(x-a\right)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
- Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)=\begin{cases} f\left(x\right) \ \ khi\ x>0 \\ f\left(-x\right)\ \ khi\, x\le 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:

  \+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần (C) nằm bên trái Oy.

  \+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy qua Oy.
- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) \ \ khi\ f\left(x\right)>0 \\ -f\left(x\right)\ \ khi\, f\left(x\right)\le 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:

  \+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.

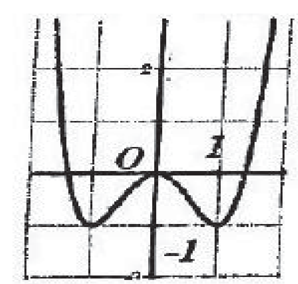
  \+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

2.2. GIẢI PHÁP ĐỂ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ.

Dạng 1: **Tìm khoảng đơn điệu và điểm cực trị của hàm số**

$y=f\left(x\right);y=f\left(x\pm a\right);y=f\left(x\right)\pm ax.$

Thí dụ 1: Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y=f\,'\left(x\right)$ trên K như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên K.



A. 1. B. 2.

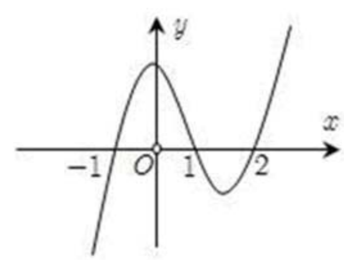
C. 3. D. 4.

Hướng dẫn:

Đối với dạng này ta chỉ cần tìm xem đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại mấy điểm mà thôi, không kể các điểm mà đồ thị $y = f'(x)$ tiếp xúc với trục Ox.

Ta chọn đáp án B.

Nhận xét: xét một thực a dương. Ta có thể đổi yêu cầu lại là: Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x+a)$ hoặc $y = f(x-a)$ trên K, thì đáp án vẫn không thay đổi. Chú ý số cực trị của các hàm số $y = f(x), y = f(x+a)$ và $y = f(x-a)$ là bằng nhau nhưng mỗi hàm số đạt cực trị tại các giá trị x_0 khác nhau!



Thí dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên chọn đáp án C.

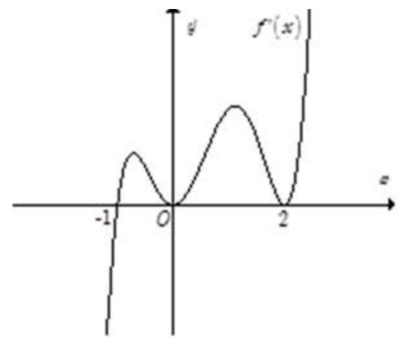
Thí dụ 3: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

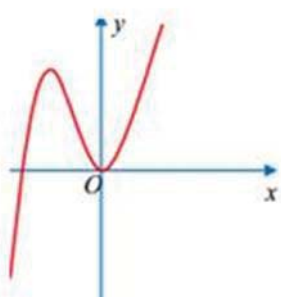


Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm $x=-1$ nên chọn đáp án B.

Thí dụ 4: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên K như hình vẽ. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)=f(x+1)$ trên K?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.



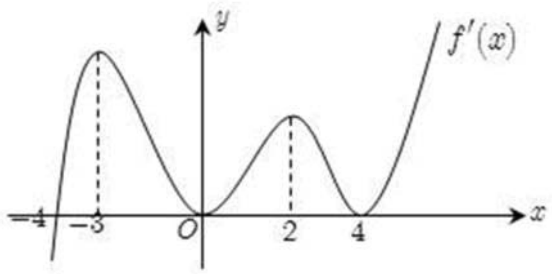
Hướng dẫn:

Ta có $g'(x)=f'(x+1)$ có đồ thị là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị. Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$ vẫn cắt trục hoành tại 1 điểm. Ta chọn đáp án B.

Thí dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 4.

C. 3. **D.** 2.



Hướng dẫn:

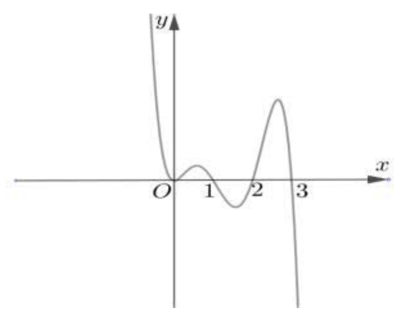
Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm nên chọn đáp án A.

Thí dụ 6:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;3]$?

A. $x = 0$ và $x = 2$. **B.** $x = 1$ và $x = 3$.

C. $x = 2$. **D.** $x = 0$.



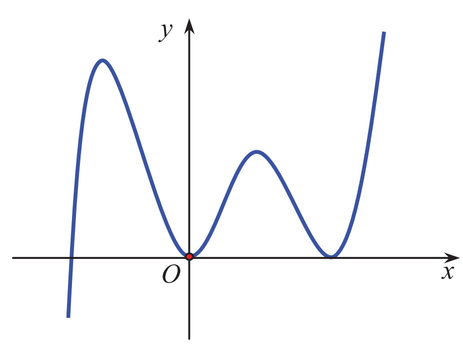
Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 2$ nên chọn đáp án C.

Thí dụ 7: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K, hàm số $y = f(x - 2018)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 4.

C. 3. **D.** 2.

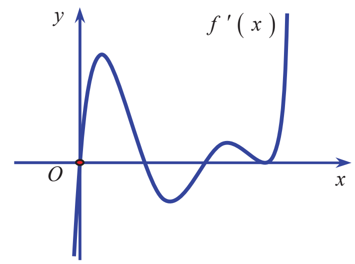


Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $f'(x-2018)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2018)$ vẫn cắt trục hoành 1 điểm.Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.

Hàm số $f(x+2018)$ có mấy điểm cực trị?

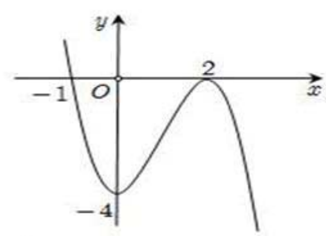


A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Hướng dẫn:

đồ thị hàm số $f'(x+2018)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x+2018)$ vẫn cắt trục hoành tại 3 điểm.Ta chọn đáp án C.

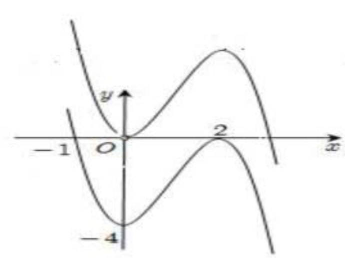
Thí dụ 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ . Hàm số $y=g(x)=f(x)+4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. B.2. C. 3. D.4.

Hướng dẫn:

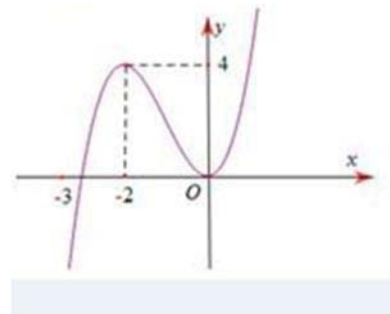
$y'=g'(x)=f'(x)+4$ có đồ thị là phép tịnh tiến đồ thị



hàm số $f'(x)$ theo phương Oy lên trên 4 đơn vị.

Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm, ta chọn đáp án A.

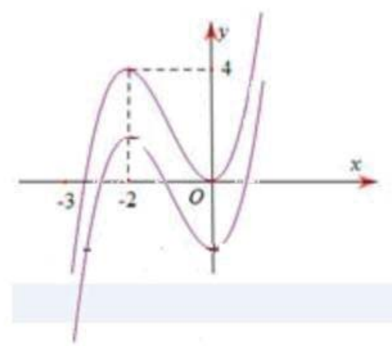
Thí dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ . Hàm số $y=g(x)=f(x)-3x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



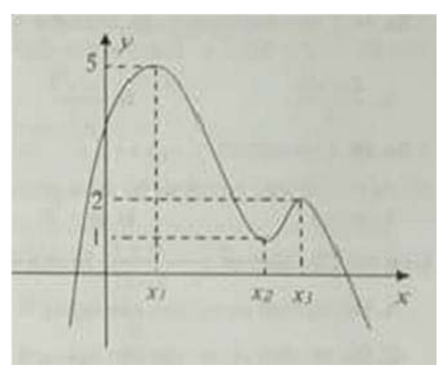
A. 1. B.2. C. 3. D.4.

Hướng dẫn:

$y'=g'(x)=f'(x)-3$ có đồ thị là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 3 đơn vị. Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm, ta chọn đáp án C.



Thí dụ 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(x)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có bao nhiêu cực trị?



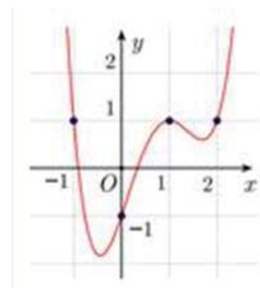
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn:

Ta có $y' = g'(x) = f'(x) - \dfrac{2018}{2017}$. Suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới $\dfrac{2018}{2017}$ đơn vị.

Ta có $1 < \dfrac{2018}{2017} < 2$ và dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm. Ta chọn phương án D.

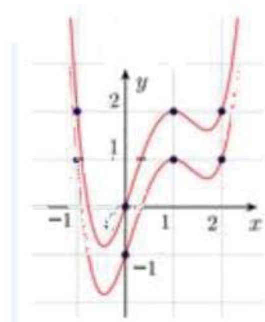
Thí dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Đặt $g(x) = f(x) + x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?



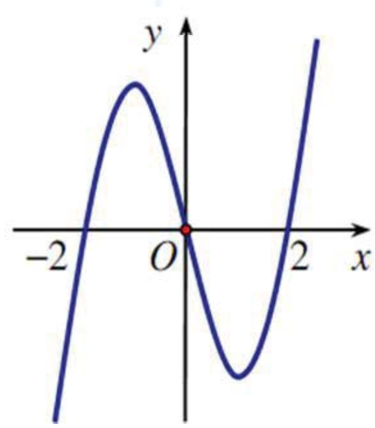
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn:

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ theo phương Oy lên trên 1 đơn vị, khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, ta chọn đáp án B.



Thí dụ 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Hướng dẫn:

Cách 1: sử dụng bảng biến thiên.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Chọn đáp án: D

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$

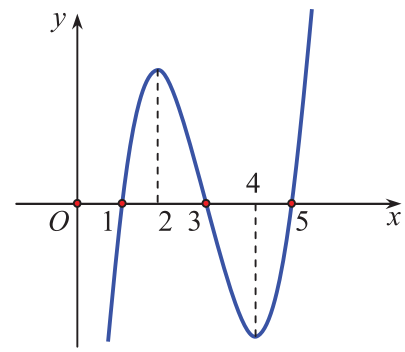
Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ nghịch biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

Trên khoảng $(0;\ 2)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành nên ta chọn đáp án D.

Thí dụ 14: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

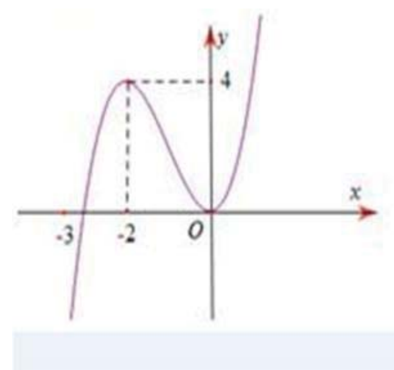
C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Trên khoảng $(1;3)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên chọn đáp án B.

Thí dụ 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

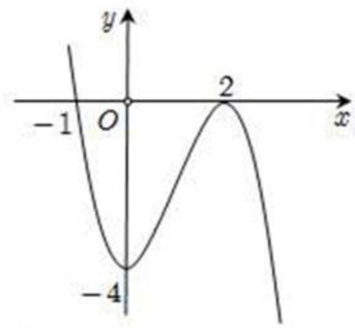
C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Hướng dẫn:

Trên khoảng $(-3;+\infty)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên chọn đáp án C.

Thí dụ 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

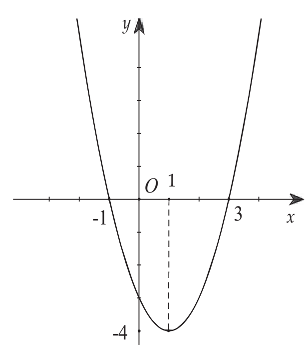
C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Trong khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty;-1)$. Ta chọn đáp án B.

Thí dụ 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

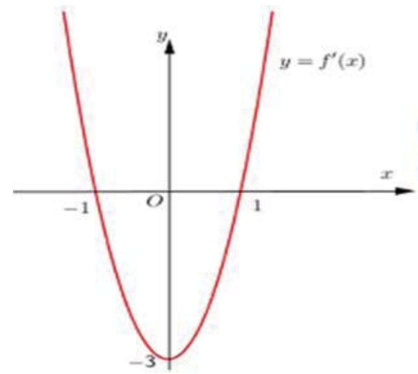
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên chọn đáp án B.

Thí dụ 18:



Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị.

B. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

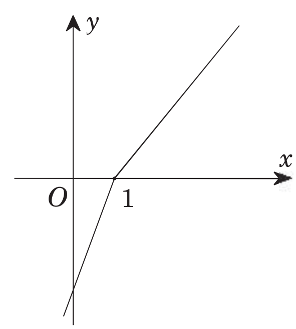
C. Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Hướng dẫn:

Trên khoảng $(-\infty;-1)$đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên chọn đáp án D.

Thí dụ 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Trên khoảng $(1;+\infty)$đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên chọn đáp án C.

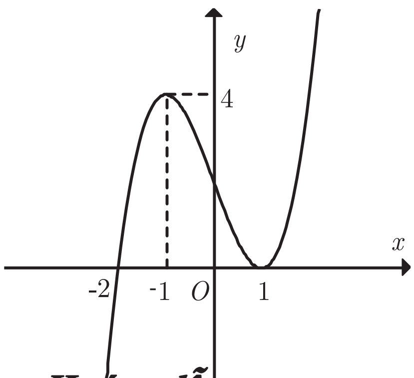
Thí dụ 20: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?

A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

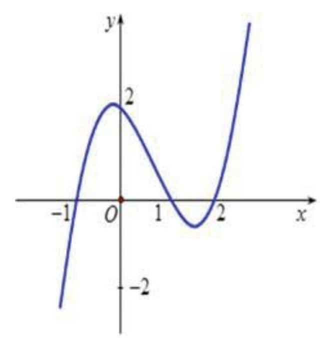
D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$



Hướng dẫn:

Trên khoảng $[-1;1]$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên chọn đáp án B.

Thí dụ 21: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

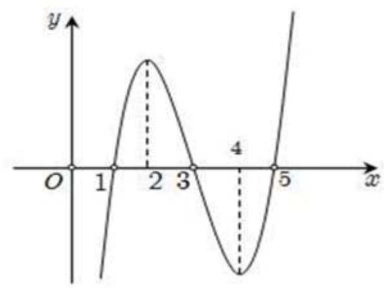
C. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt ta chọn đáp án: C

Thí dụ 22: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Kết luận nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

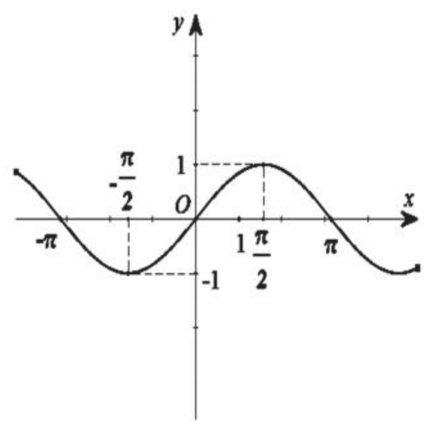
C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.

Hướng dẫn:

Trong khoảng $(1;3)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$, ta chọn đáp án B.

Thí dụ 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

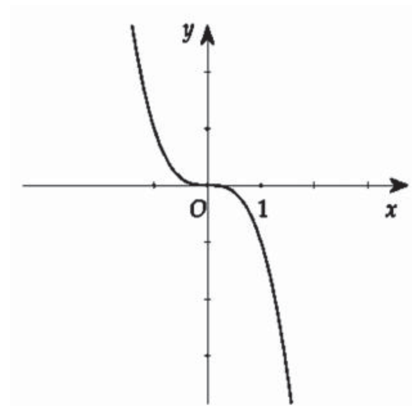
C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Hướng dẫn:

Trong khoảng $(0;\pi)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$ ta chọn đáp án D.

Thí dụ 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

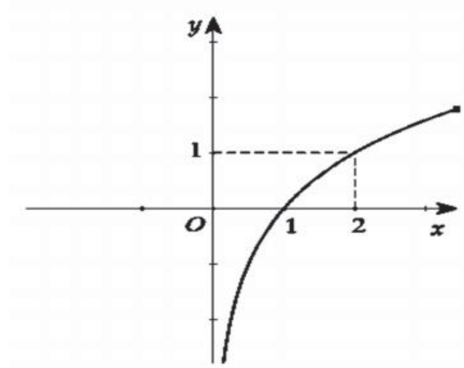
C. Hàm số $f(x)$ chỉ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Trong khoảng $(0;+\infty)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ ta chọn đáp án D.

Thí dụ 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)$ chỉ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Trong khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ ta chọn đáp án C.

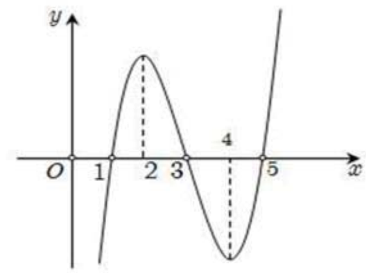
Thí dụ 26: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x+1)$. Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

D. Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



Hướng dẫn:

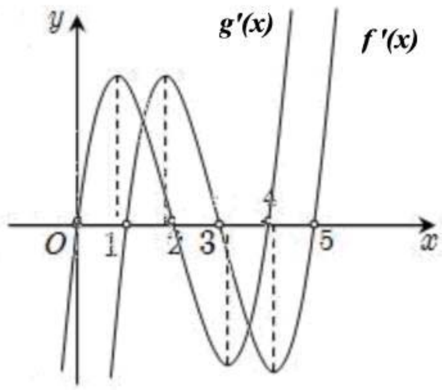
Cách 1 : $g'(x) = f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=3 \\ x+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

$g'(x) = f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x+1 < 3 \\ x+1 > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x > 4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Ta chọn đáp án C.

Cách 2: Đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x+1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị.



Ta thấy trên khoảng $(2;4)$ đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$ nằm bên dưới trục hoành nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$, ta chọn đáp án C.

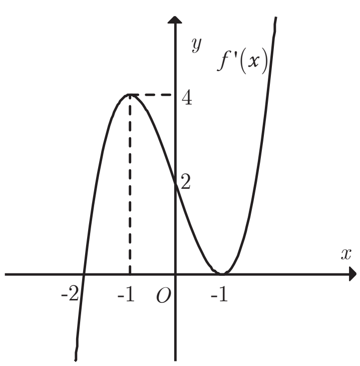
Thí dụ 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

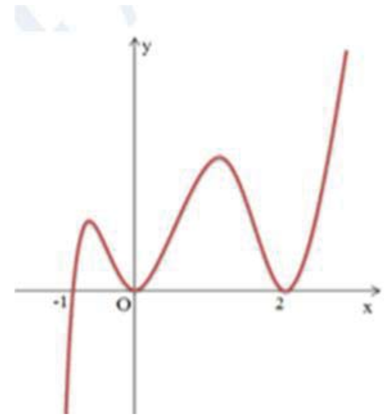
D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.



Hướng dẫn:

Giá trị của hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=-2$ nên chọn đáp án C.

Thí dụ 28: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$ và $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị.

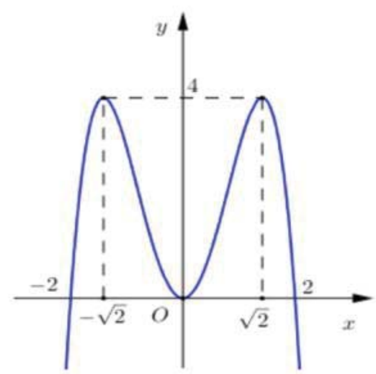
C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

Hướng dẫn:

Giá trị của hàm số $y=f'(x)$đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=-1$ nên ta chọn đáp án C.

Thí dụ 29: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

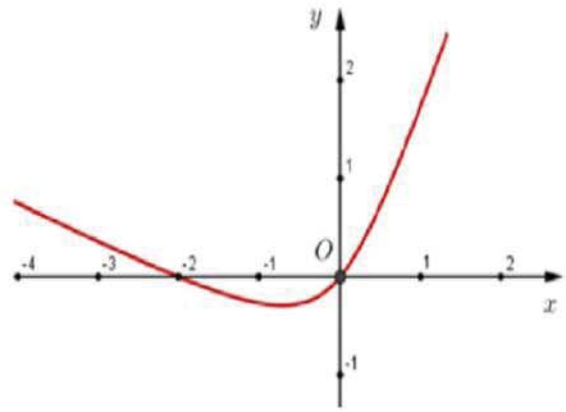
C. Hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

Giá trị của hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=2$ nên ta chọn đáp án A.

Thí dụ 30: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. f đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. f đạt cực tiểu tại $x=-2$.

C. f đạt cực đại tại $x=-2$.

D. Cực tiểu của f nhỏ hơn cực đại của f .

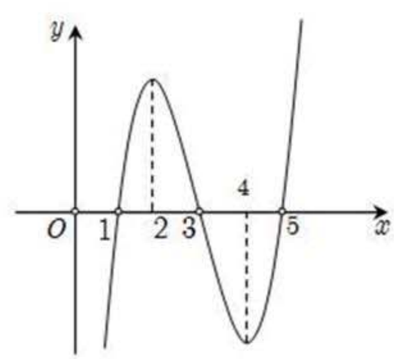
Hướng dẫn: Giá trị hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=-2$ nên ta chọn đáp án B.

Nói thêm: theo bảng biến thiên sau suy ra phương án D là Đúng.

x	$+\infty$		-2		0		$-\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\nearrow$		$f(-2)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Thí dụ 31: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f(x-1)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x=2$. B. $x=4$. C. $x=3$. D. $x=1$.

Hướng dẫn :

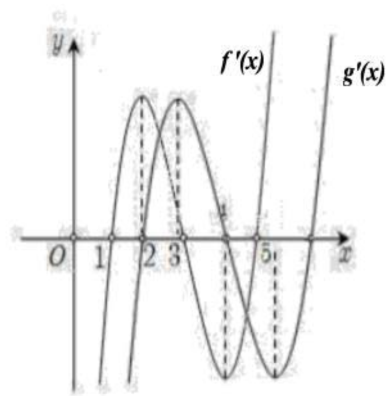
Cách 1: $g'(x)=f'(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=3 \\ x-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \\ x=6 \end{array}\right.$

$g'(x)=f'(x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x-1<3 \\ x-1>5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x>6 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

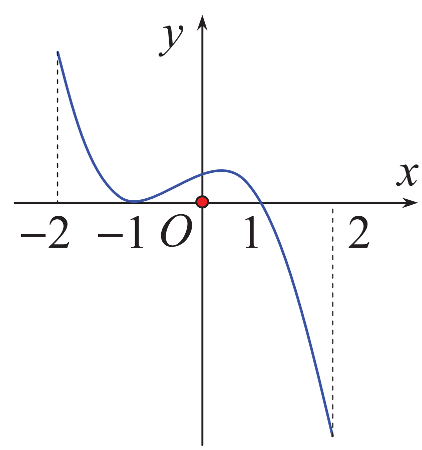
Ta chọn đáp án B.

Cách 2: đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x-1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang phải 1 đơn vị.



Đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x-1)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=2; x=4; x=6$ và giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=4$. Ta chọn đáp án B.

Dạng 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất hoặc so sánh các giá trị của hàm số $y=f(x)$.



Thí dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2;2]$.

A. $x_0=2$. **B.** $x_0=-1$.

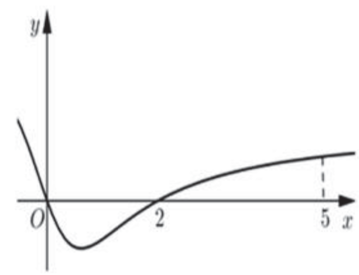
C. $x_0 = -2$. **D.** $x_0 = 1$.

Hướng dẫn: Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	-2		-1		1		2
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$			$f(1)$	$\searrow$	

Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$?



A. $m = f(0), M = f(5)$. **B.** $m = f(2), M = f(0)$.

C. $m = f(1), M = f(5)$. **D.** $m = f(2), M = f(5)$.

Hướng dẫn:

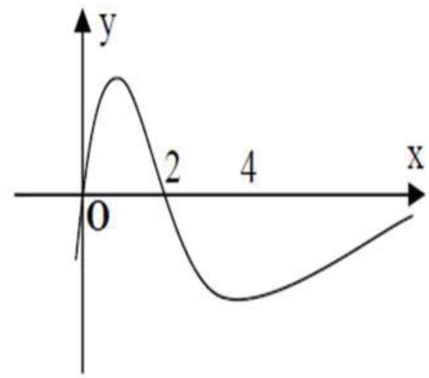
x	0		2		3		5
y'	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

$\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ **và** $f(3) > f(2)$

$f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)-f(5)=f(2)-f(3)<0 \Rightarrow f(0) < f(5)$

Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$?



A. $m = f(4), M = f(2)$. **B.** $m = f(4), M = f(1)$.

C. $m = f(0), M = f(2)$. **D.** $m = f(1), M = f(2)$.

Hướng dẫn:

x	0	1	2	3	4
y'	0	+	0	−	
y	$f(0)$		$f(2)$		$f(4)$

Dựa vào BBT ta có $M = f(2)$, GTNN chỉ có thể là $f(0)$ hoặc $f(4)$

Ta lại có: $f(1); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1)+f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2)-f(1)-f(3) > 0$

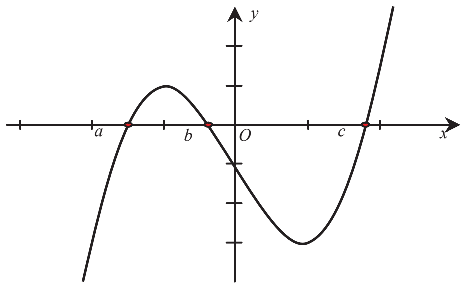
$$f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3) \Leftrightarrow f(0)-f(4)=2f(2)-f(3)-f(1)>0 \Rightarrow f(0)>f(4).$$

Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm.

C. 4 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.



Hướng dẫn:

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗	

$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx < 0 \Rightarrow f(c) < f(a)$. Do $f(a) > 0$

nên

$f(c) > 0$: PT $f(x) = 0$ vô nghiệm.

$f(c) = 0$: PT $f(x) = 0$ có 1 nghiệm.

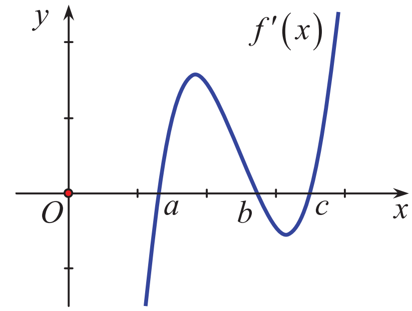
$f(c) < 0$: PT $f(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án: A

Thí dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a)>0$?

A. 3. **B.** 2.

C. 1. **D.** 0.



Hướng dẫn:

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗	

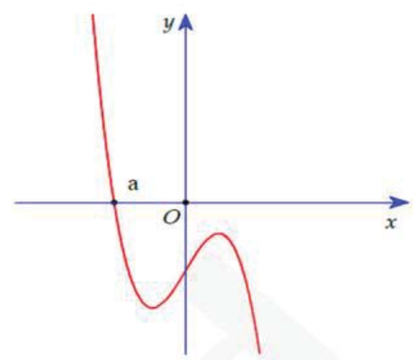
$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c f'(x)dx>0 \Rightarrow f(c)>f(a)>0 \Rightarrow$ PT

$f(x)=0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án: D

Thí dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Biết $f(a)<0$, hỏi phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

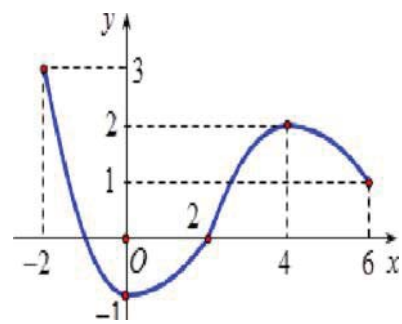


Hướng dẫn:

x	$-\infty$		a		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $f(a)<0$ nên chọn đáp án A.

Thí dụ 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-2)$. **B.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(2)$.

C. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$. **D.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

Hướng dẫn:

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(6)$

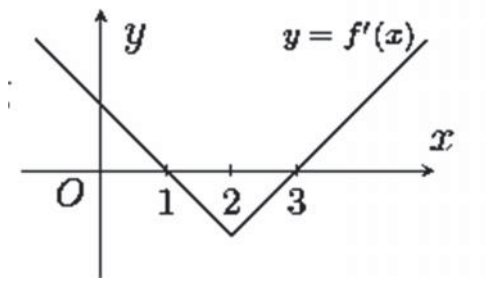
Ta có:

$$f(6)-f(-1)=\int_{-1}^{6} f'(x)dx=\int_{-1}^{2} f'(x)dx+\int_{2}^{6} f'(x)dx>0\Rightarrow f(6)>f(-1).$$

Ta chọn đáp án C.

Thí dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0); f(1); f(3); f(4)$?

A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.



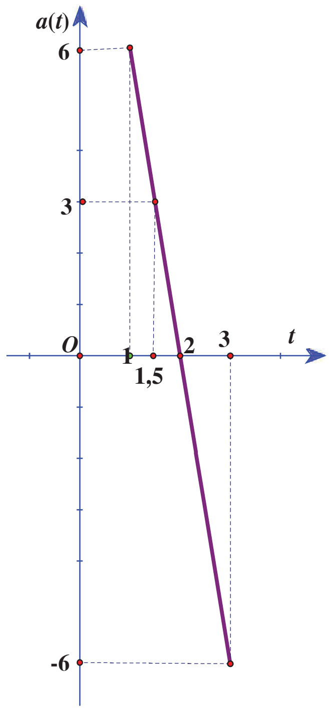
Hướng dẫn:

x	0		1		3		4
y'		+	0	-	0	+	
y	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(4)$

$$f(4)-f(1)=\int_1^4 f'(x)dx=\int_1^3 f'(x)dx+\int_3^4 f'(x)dx<0 \Rightarrow f(4)<f(1).$$

Ta chọn đáp án B.

Thí dụ 9: Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc vật thể chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?



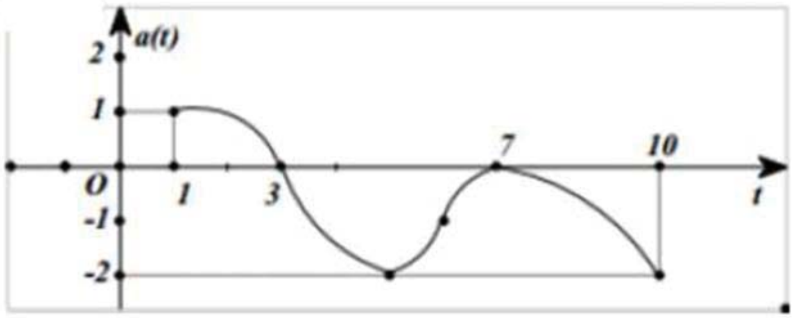
A. giây thứ 2. **B.** giây thứ nhất. **C.** giây thứ 1,5. **D.** giây thứ 3.

Hướng dẫn:

t	1 1,5 2 3
$a(t)=v'(t)$	+ + 0 -
$v(t)$	$v(1) \nearrow v(1,5) \nearrow v(2) \searrow v(3)$

Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 10: Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc vật thể chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?



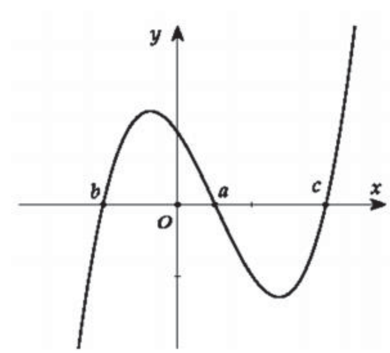
A. giây thứ 7. **B.** giây thứ nhất. **C.** giây thứ 10. **D.** giây thứ 3.

Hướng dẫn:

t	1	3	7	10
$a(t) = v'(t)$	+	0	-	-
$v(t)$	$v(1) \nearrow$	$v(3)$	$\searrow v(7)$	$v(10)$

Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f(a) > f(b)$ và $f(c) > f(a)$.
B. $f(a) > f(b)$ và $f(c) < f(a)$.
C. $f(a) < f(b)$ và $f(c) > f(a)$.
D. $f(a) < f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

Hướng dẫn: $f(a) - f(b) = \int_b^a f'(x)dx > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx < 0 \Leftrightarrow f(c) < f(a)$.

Ta chọn đáp án B.

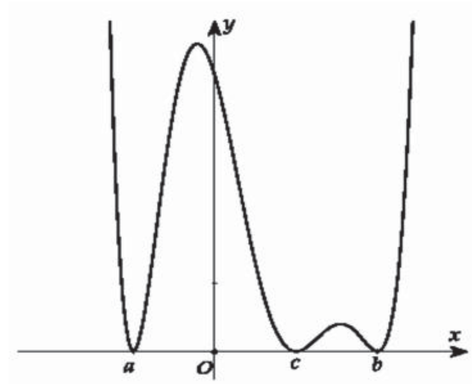
Thí dụ 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(b)>f(c)$ và $f(c)>f(a)$.

B. $f(b)>f(c)$ và $f(c)<f(a)$.

C. $f(b)<f(c)$ và $f(c)>f(a)$.

D. $f(b)<f(c)$ và $f(c)<f(a)$.

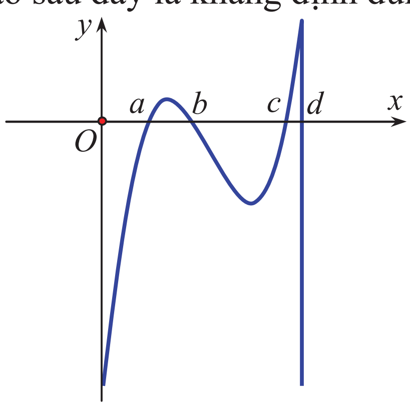


Hướng dẫn: $f(b)-f(c)=\int_c^b f'(x)dx>0 \Leftrightarrow f(b)>f(c)$.

$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx>0 \Leftrightarrow f(c)>f(a)$.

Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 13: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$.

B. $M+m=f(d)+f(c)$.

C. $M+m=f(b)+f(a)$.

D. $M+m=f(0)+f(a)$.

Hướng dẫn:

Ta có bảng biến thiên:

x	0		a		b		c		d
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$

So sánh $f(a);f(c)$

$$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c f'(x)dx<0\Rightarrow f(c)<f(a)\Rightarrow m=f(c).$$

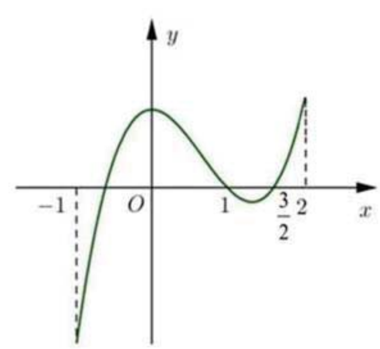
So sánh $f(0);f(b);f(d)$.

$$f(b)-f(0)=\int_0^b f'(x)dx=\int_0^a f'(x)dx+\int_a^b f'(x)dx<0\Rightarrow f(b)<f(0).$$

$$f(d)-f(b)=\int_b^d f'(x)dx=\int_b^c f'(x)dx+\int_c^d f'(x)dx<0\Rightarrow f(d)<f(b).$$

$\Rightarrow f(d)<f(b)<f(0)\Rightarrow M=f(0)$. Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 14: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Mệnh đề nào sau đây đúng ?



A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)$.

B. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$.

C. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$.

D. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn :

x	-1		a		1		$\frac{3}{2}$		2
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$f(-1)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$

$$f(1)-f(-1)=\int_{-1}^{1} f'(x)dx=\int_{-1}^{a} f'(x)dx+\int_{a}^{1} f'(x)dx>0 \Rightarrow f(1)>f(-1) \ .$$

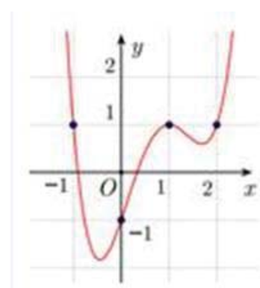
$$f(2)-f(1)=\int_{1}^{2} f'(x)dx=\int_{1}^{1,5} f'(x)dx+\int_{1,5}^{2} f'(x)dx>0 \Rightarrow f(2)>f(1).$$

Ta chọn đáp án B.

Thí dụ 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Đặt $g(x)=f(x)-x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $g(-1)<g(1)<g(2)$. B. $g(2)<g(1)<g(-1)$.

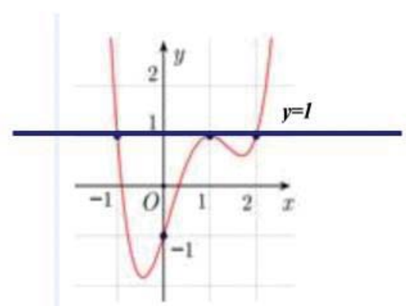
C. $g(2)<g(-1)<g(1)$. D. $g(1)<g(-1)<g(2)$.



Hướng dẫn :

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=1$.

Ta có:



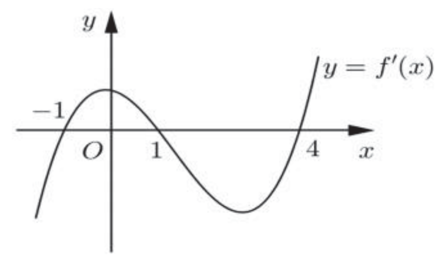
$$g(1)-g(-1)=\int_{-1}^{1} g'(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[f'(x)-1\right]dx<0 \Rightarrow g(1)<g(-1).$$

$$g(2)-g(1)=\int_1^2 g'(x)dx=\int_1^2 [f'(x)-1]dx<0 \Rightarrow g(2)<g(1).$$

Ta chọn đáp án B.

Dạng 3: Tìm khoảng đơn điệu, điểm cực trị, so sánh các giá trị của hàm số $y=f[u(x)]$, $y=kf(x)\pm g(x)$.

Thí dụ 16: **(*Câu 39 đề minh hoạ 001 năm 2018*)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;3)$ **B.** $(2;+\infty)$

C. $(-2;1)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Hướng dẫn:

Ta có $f'(2-x)=-f'(2-x)>\Leftrightarrow f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\1>x>-2\end{array}\right.$

Chọn đáp án C.

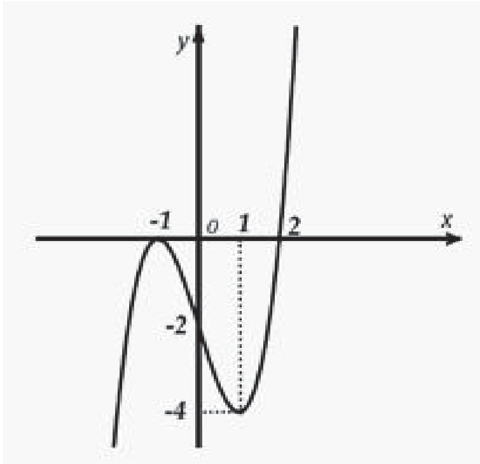
Thí dụ 17: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.



Hướng dẫn:

Ta có: $g'(x) = 2x.f'\left(x^2 - 2\right)$

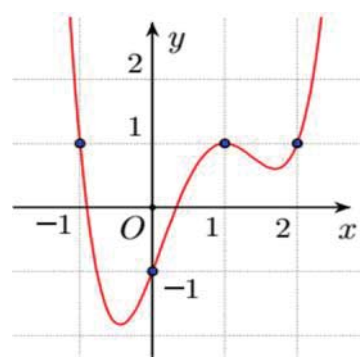
$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$f'\left(x^2 - 2\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(2 - x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta chọn đáp án C.

Thí dụ 18: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x = 1$. **B.** $x = 2$.

C. $x = 0$. **D.** $x = -1$.

Hướng dẫn :

Ta có:

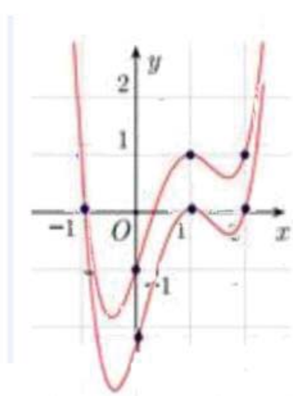
$g'(x) = f'(x) - 1$

Cách 1 :Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

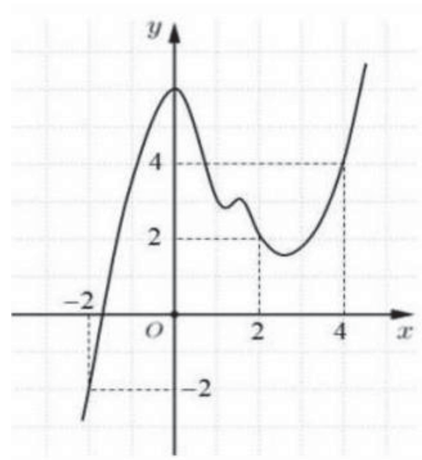
Ta chọn đáp án D.
Cách 2 : Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$
Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 1 đơn vị.



Ta thấy giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$. Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 19: (***câu 49-đề 101-TNTHPTQG 2017-2018***)

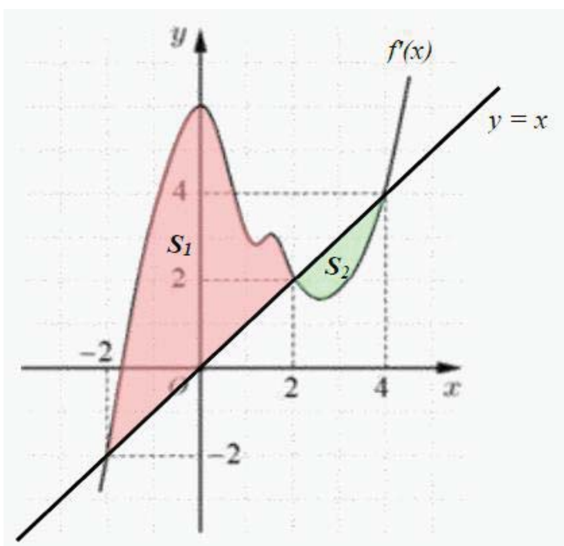
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.
D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Hướng dẫn:

Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2\left[f'(x) - x\right]$. Ta vẽ đường thẳng $y = x$.



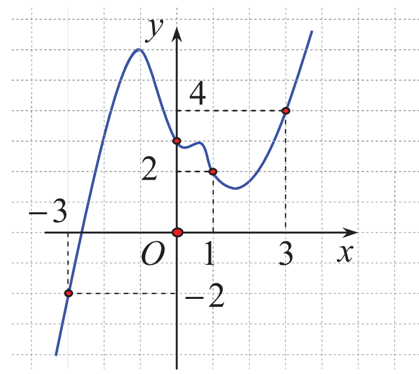
Ta có: $h(2) - h(-2) = \int_{-2}^{2} h'(x)dx = 2\int_{-2}^{2}\left[f'(x) - x\right]dx > 0 \Rightarrow h(2) > h(-2)$.

$h(4) - h(2) = \int_{2}^{4} h'(x)dx = 2\int_{-2}^{2}\left[f'(x) - x\right]dx < 0 \Rightarrow h(4) < h(2)$.

$$h(4)-h(-2)=\int_{-2}^{4} h'(x)dx = 2\int_{-2}^{4}[f'(x)-x]dx = 2\int_{-2}^{2}[f'(x)-x]dx + 2\int_{2}^{4}[f'(x)-x]dx$$

$$=2S_1-2S_2>0 \Rightarrow h(4)>h(-2).$$

Như vậy ta có: $h(-2)<h(4)<h(2)$. Ta chọn đáp án C.



Thí dụ 20: ***(câu 48-đề 102-TNTHPTQG 2017-2018)*** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(3)>g(-3)>g(1)$.

B. $g(-3)>g(3)>g(1)$.

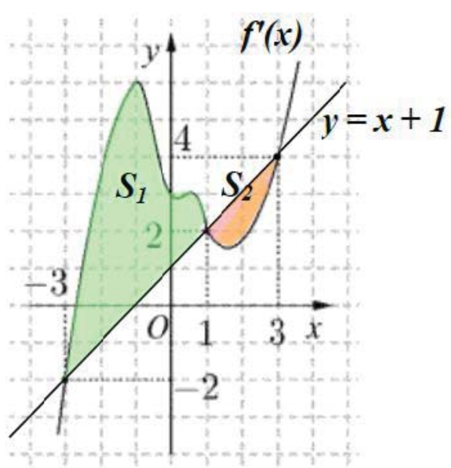
C. $g(1)>g(-3)>g(3)$.

D. $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Hướng dẫn:

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)=2\left[f'(x)-(x+1)\right]$

Ta vẽ đường thẳng $y=x+1$.



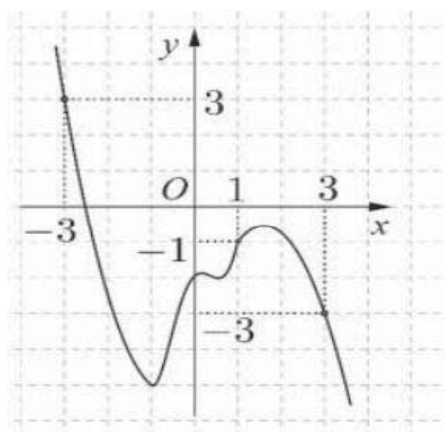
Ta có: $g(1)-g(-3)=\int\limits_{-3}^{1} g'(x)dx = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx > 0 \Rightarrow g(1) > g(-3).$

$$g(3)-g(1)=\int\limits_{1}^{3} g'(x)dx = 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx < 0 \Rightarrow g(3) < g(1).$$

$$g(3)-g(-3)=\int\limits_{-3}^{3} g'(x)dx = 2\int\limits_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx + 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx$$
$$= 2S_1 - 2S_2 > 0$$
$$\Rightarrow g(3) > g(-3).$$

Như vậy ta có: $g(1) > g(3) > g(-3)$ Ta chọn đáp án D.

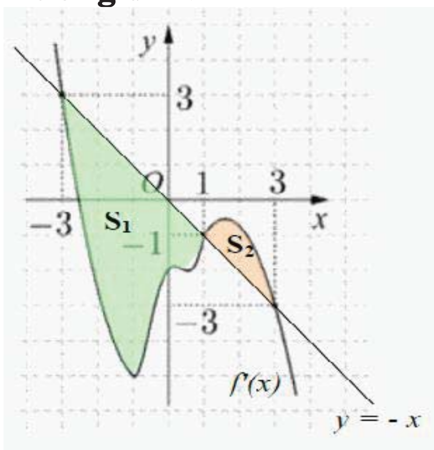
Thí dụ 21: (***câu 46-đề 103-TNTHPTQG 2017-2018***)Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$.   **B.** $g(1)<g(3)<g(-3)$.

C. $g(1)<g(-3)<g(3)$.   **D.** $g(-3)<g(3)<g(1)$.

Hướng dẫn:



Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2x = 2\left[f'(x) + x\right] \Rightarrow -g'(x) = 2\left[-x - f'(x)\right]$

Ta vẽ đường thẳng $y = -x$.

$$g(-3) - g(1) = -\int_{-3}^{1} g'(x)dx = 2\int_{-3}^{1}\left[-x - f'(x)\right]dx > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1).$$

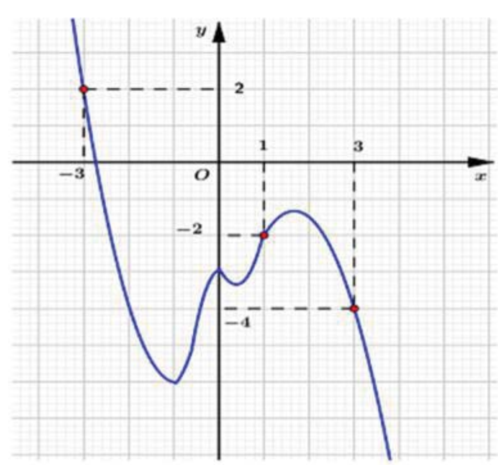
$$g(1) - g(3) = -\int_{1}^{3} g'(x)dx = 2\int_{1}^{3}\left[-x - f'(x)\right]dx < 0 \Rightarrow g(3) > g(1).$$

$$g(-3) - g(3) = -\int_{-3}^{3} g'(x)dx = 2\int_{-3}^{1}\left[-x - f'(x)\right]dx + 2\int_{1}^{3}\left[-x - f'(x)\right]dx = 2S_1 - 2S_2 > 0$$

$\Rightarrow g(-3) > g(3).$

Như vậy ta có: $g(1) < g(3) < g(-3)$ Ta chọn đáp án B.

Thí dụ 22: (***câu 47-đề 104-TNTHPTQG 2017-2018***)Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.

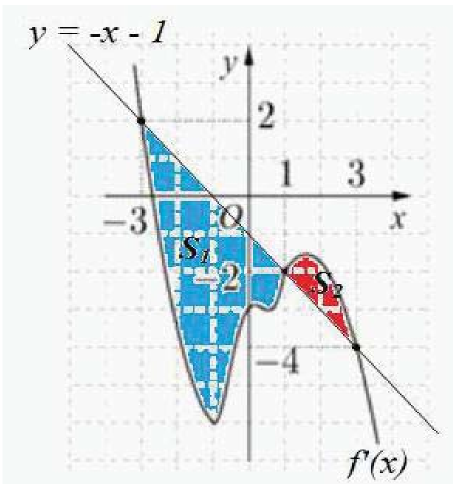
D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$g'(x)=2f'(x)+2(x+1)=2\left[f'(x)+(x+1)\right]\Rightarrow -g'(x)=2\left[-(x+1)-f'(x)\right]$$

Ta vẽ đường thẳng $y=-(x+1)$.



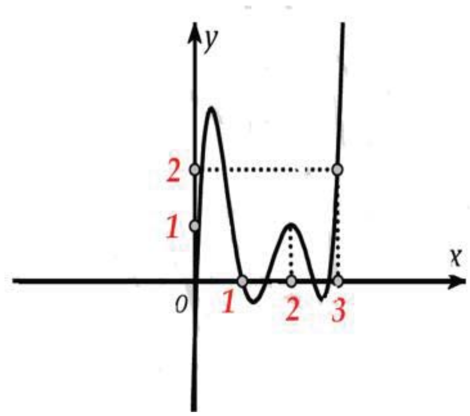
$$g(-3)-g(1)=-\int_{-3}^{1}g'(x)dx=2\int_{-3}^{1}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx>0\Rightarrow g(-3)>g(1).$$

$$g(1)-g(3)=-\int_{1}^{3}g'(x)dx=2\int_{1}^{3}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx<0\Rightarrow g(3)>g(1).$$

$$g(-3)-g(3)=-\int_{-3}^{3}g'(x)dx=2\int_{-3}^{1}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx+2\int_{1}^{3}\left[-(x+1)-f'(x)\right]dx=2S_1-2S_2>0$$

$$\Rightarrow g(-3)>g(3)$$

Như vậy ta có: $g(1)<g(3)<g(-3)$ Ta chọn đáp án A.



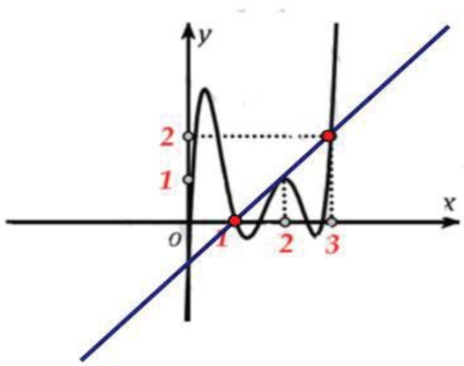
Thí dụ 23: Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Hướng dẫn:

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$.

Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3$.

Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

Ta có :

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 4 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 8 điểm cực trị.

Đáp án C.

Dạng 4: Liên quan đến đồ thị của hàm số $y=f(x); y=f'(x); y=f''(x)$.

Phương pháp: sử dụng 1 trong 2 phương pháp hoặc kết hợp cả 2 phương pháp.

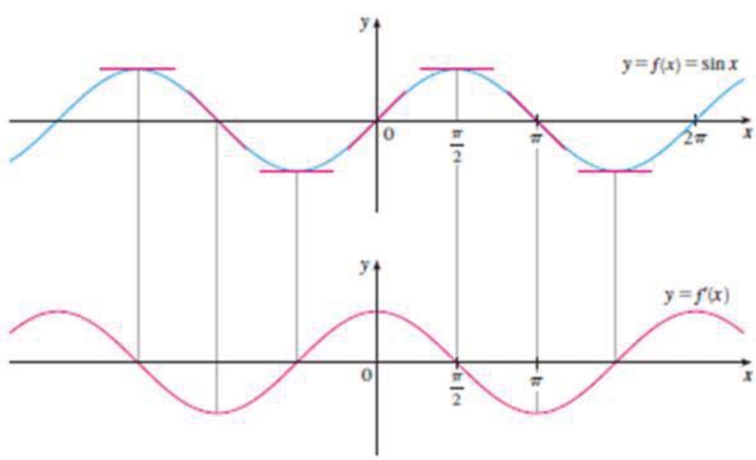
PP1: Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại những điểm là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$.

PP2: Tìm giao điểm của các đồ thị hàm số với trục hoành (nếu có). Sau đó dựa vào tính chất sau.

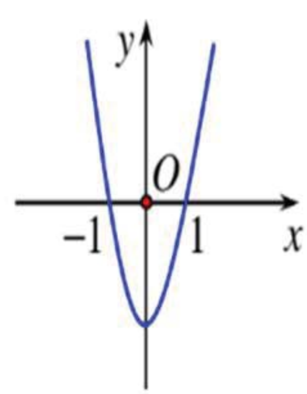
$f'(x)>0, \forall x\in K \Rightarrow f(x)$ tăng trên K .

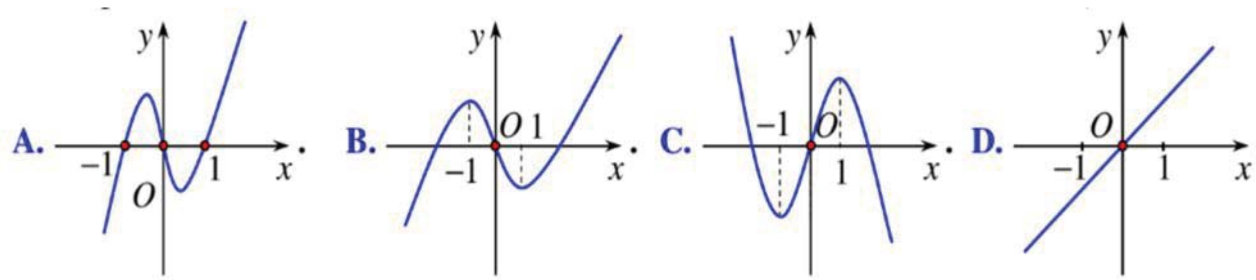
$f'(x)<0, \forall x\in K \Rightarrow f(x)$ giảm trên K .

Minh hoạ bằng hàm số $y=\sin x$.

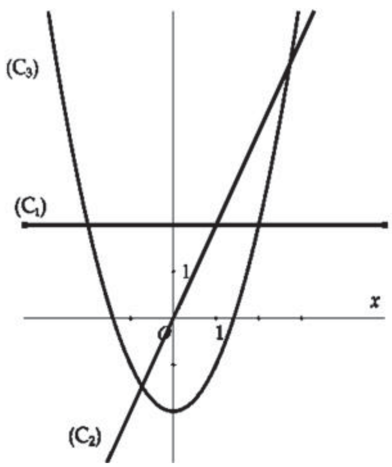


Thí dụ 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, sao cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol có dạng như trong hình bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cò đồ thị nào trong bốn đáp án sau?





Hướng dẫn: đáp án B.



Thí dụ 25: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Hướng dẫn:

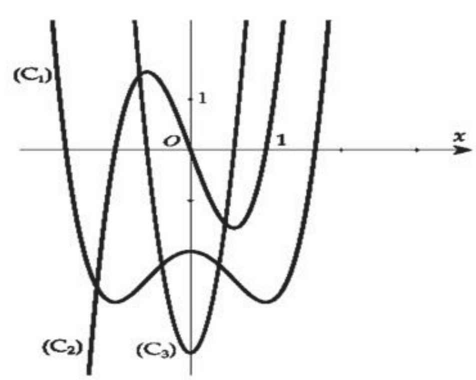
Trong khoảng $(0;+\infty)$ thì (C_2) nằm trên trục hoành và (C_3) "đi lên".

Trong khoảng $(-\infty;0)$ thì (C_2) nằm dưới trục hoành và (C_3) "đi xuống".

Đồ thị (C_1) nằm hoàn toàn trên trục hoành và (C_2) "đi lên". Ta chọn đáp án A.

Hoặc:

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_3).



Đồ thị (C_2) đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đồ thị (C_1) lại nằm hoàn toàn trên trục hoành.Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 26: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Hướng dẫn:

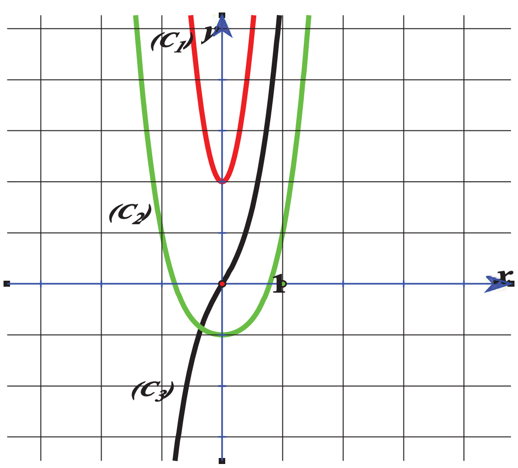
Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 3 điểm là 3 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_1).

Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2). Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 27: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

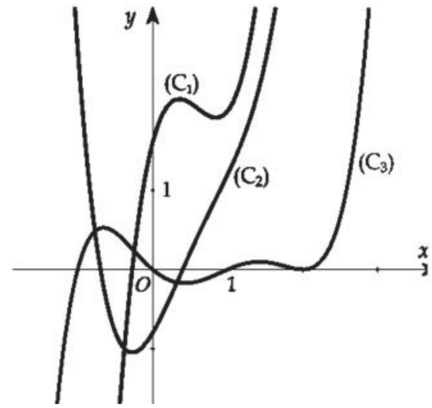


Hướng dẫn:

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2).

Đồ thị (C_3) đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đồ thị (C_1) lại nằm hoàn toàn trên trục hoành. Ta chọn đáp án C.

Thí dụ 28: Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

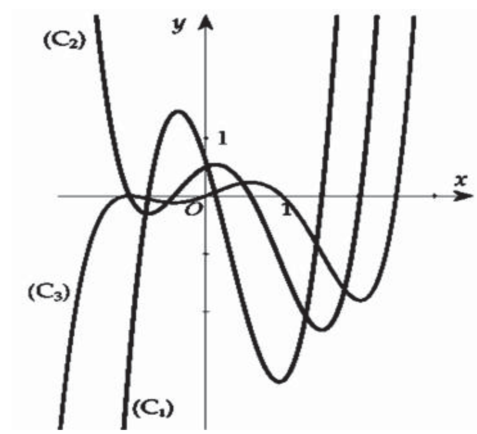
C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Hướng dẫn:

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_3)

Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2)Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 29: Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



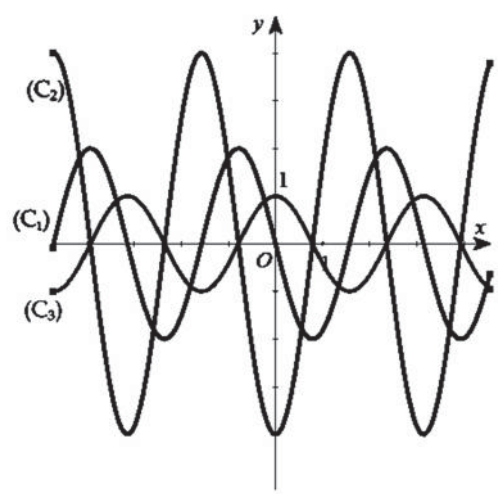
A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Hướng dẫn:

Ta chọn đáp án A.

Thí dụ 30: Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

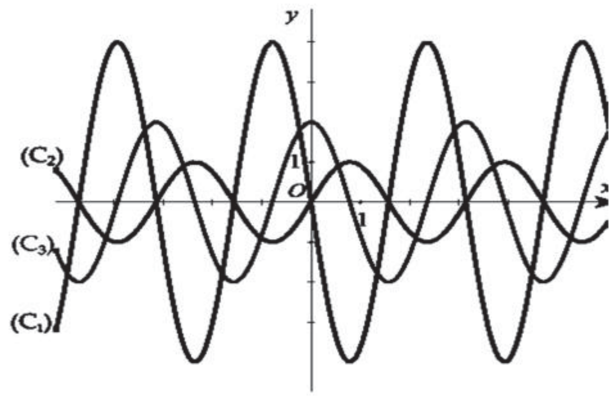


A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$

C. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

Hướng dẫn:

Dựa vào phương pháp 1 có hai khả năng : $(C_3);(C_1);(C_2)$ hoặc $(C_2);(C_1);(C_3)$. Quan sát đồ thị ta thấy ứng với các khoảng mà đồ thị (C_1) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_3) "đi lên" và ngược lại; còn ứng với các khoảng mà đồ thị (C_2) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_1) "đi lên" và ngược lại. Ta chọn đáp án D .



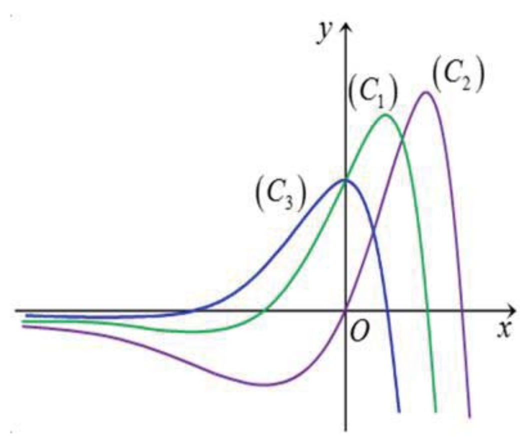
Thí dụ 31: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

C. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_2);(C_3);(C_1)$.

Hướng dẫn:

Dựa vào phương pháp 1 có hai khả năng : $(C_1);(C_3);(C_2)$ hoặc $(C_2);(C_3);(C_1)$. Quan sát đồ thị ta thấy ứng với các khoảng mà đồ thị (C_3) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_2) "đi lên" và ngược lại; còn ứng với các khoảng mà đồ thị (C_1) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_3) "đi lên" và ngược lại. Ta chọn đáp án D .



Thí dụ 32: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Hướng dẫn:

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2); đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_1). Ta chọn đáp án B.

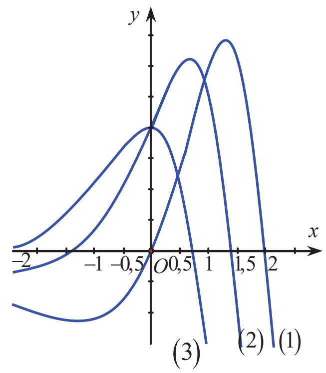
Thí dụ 33: Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1)>h(-1)>f(-1)$.

B. $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

C. $h(-1)>f(-1)>g(-1)$.

D. $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.

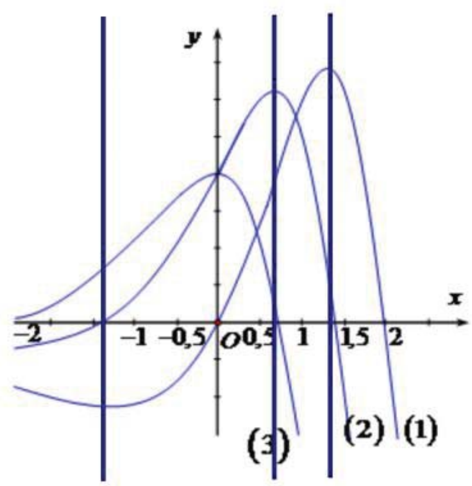


Hướng dẫn:

Kết hợp 2 phương pháp ta tìm được.

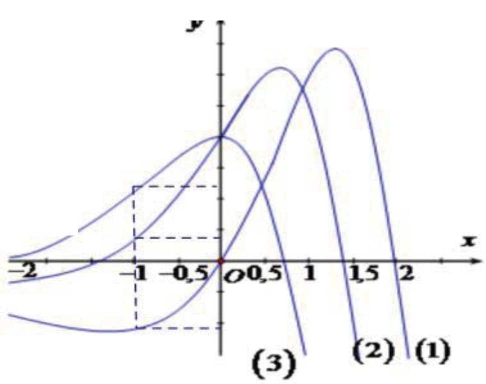
Hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$

có đồ thị là 3 đường theo thứ tự là $(1);(2);(3)$.

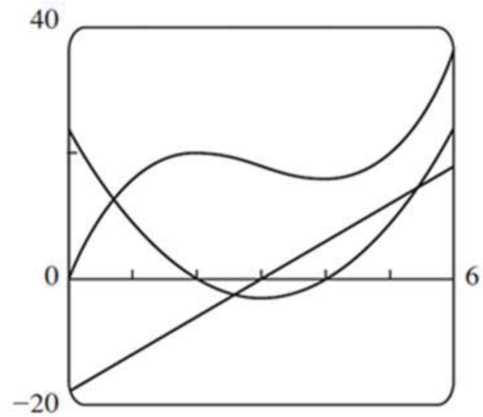


Từ đồ thị ta thấy: $h(-1)>g(-1)>f(-1)$

Ta chọn đáp án B.



Thí dụ 34: Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $g(1)>h(1)>f(1)$.

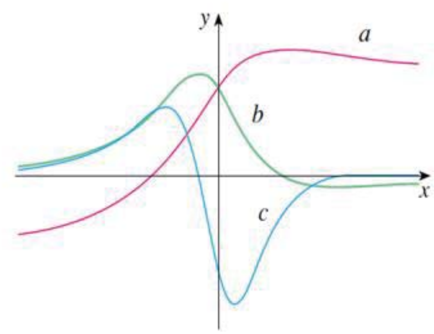
B. $h(1)>g(1)>f(1)$.

C. $h(1)>f(1)>g(1)$.

D. $f(1)>g(1)>h(1)$.

Hướng dẫn: Đáp án C.

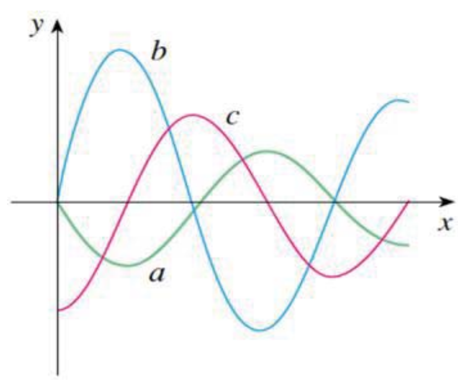
Thí dụ 35: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. a,b,c. B. b,a,c. C. a,c,b. D. b,c,a.

Hướng dẫn: đáp án A.

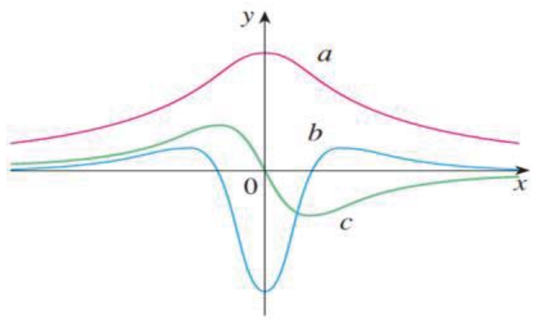
Thí dụ 36: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. a,b,c. B. b,a,c. C. a,c,b. D. b,c,a.

Hướng dẫn: đáp án C.

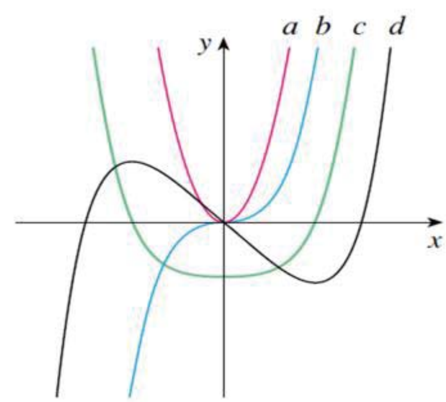
Thí dụ 37: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. $a,b,c.$ B. $b,a,c.$ C. $a,c,b.$ D. $b,c,a.$

Hướng dẫn: đáp án C.

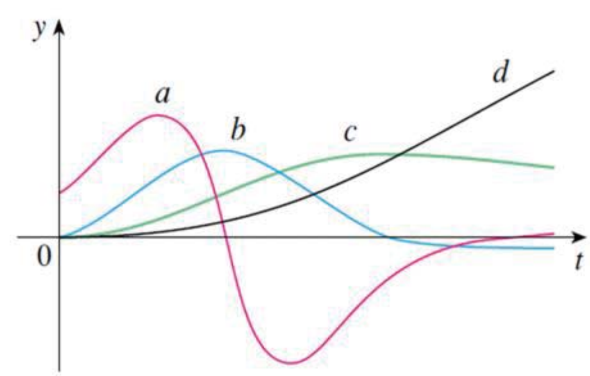
Thí dụ 38: Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. $c,d,b,a.$ B. $d,c,b,a.$ C. $d,c,a,b.$ D. $d,b,c,a.$

Hướng dẫn: Đáp án B.

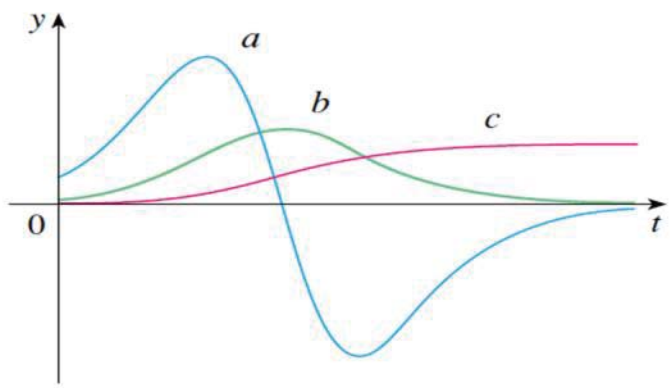
Thí dụ 39: Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. $c,d,b,a.$ B. $d,c,a,b.$ C. $d,c,b,a.$ D. $d,b,c,a.$

Hướng dẫn: Đáp án C.

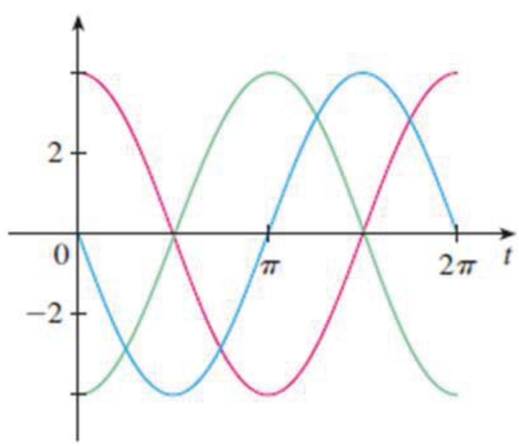
Thí dụ 40: Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường, hàm vật tốc và hàm gia tốc theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào ?



A. $b,c,a.$ B. $c,a,b.$ C. $a,c,b.$ D. $c,b,a.$

Hướng dẫn: đáp án D.

Thí dụ 41: Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?

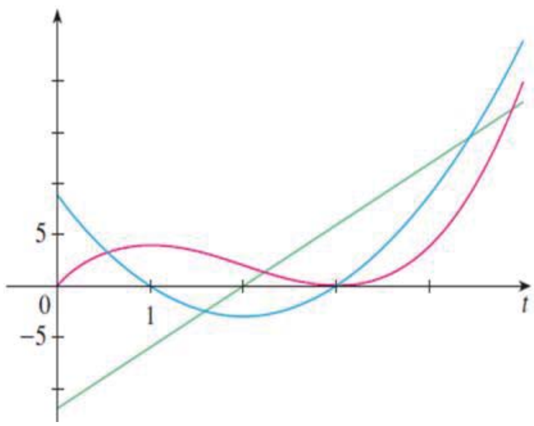


A. $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi).$ B. $a(\pi) < v(\pi) < s(\pi).$

C. $s(\pi) < a(\pi) < v(\pi).$ D. $v(\pi) < a(\pi) < s(\pi).$

Hướng dẫn: đáp án A.

Thí dụ 42: Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $s(4) < v(4) < a(4)$.

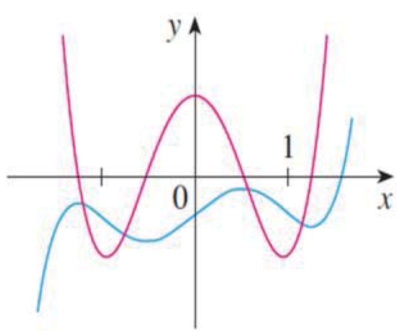
B. $a(4) < v(4) < s(4)$.

C. $s(4) < a(4) < v(4)$.

D. $v(4) < a(4) < s(4)$.

Hướng dẫn: đáp án A.

Thí dụ 43: Cho đồ thị của hàm số f và f' như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f'(-1) < f''(1)$.

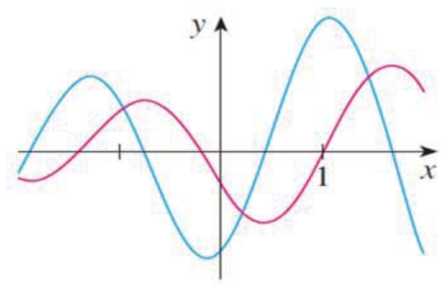
B. $f'(-1) > f''(1)$.

C. $f'(-1) = f''(1)$.

D. $f''(0) \neq f''(1)$.

Hướng dẫn: đáp án A.

Thí dụ 44: Cho đồ thị của hàm số f và f' như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f'(-1) < f''(1)$.

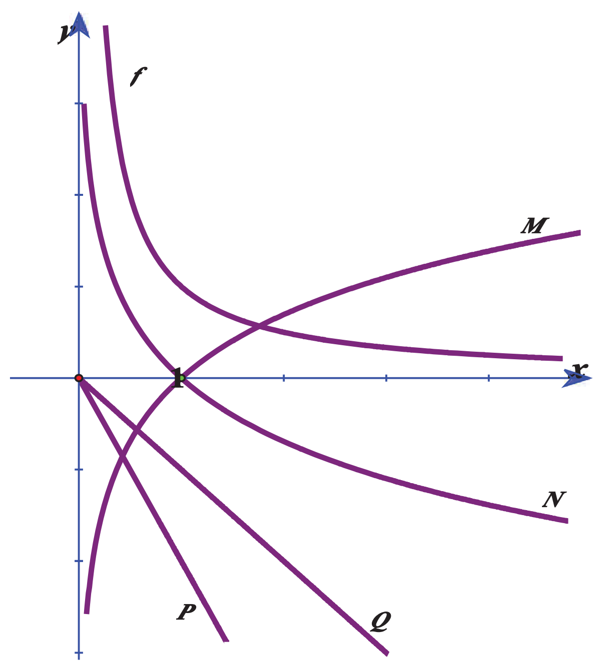
B. $f'(-1) > f''(1)$.

C. $f'(-1) = f''(1)$.

D. $f'(-1) = 2f''(1)$.

Hướng dẫn:đáp án B

Thí dụ 45: Trong các đồ thị M, N, P, Q, đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?

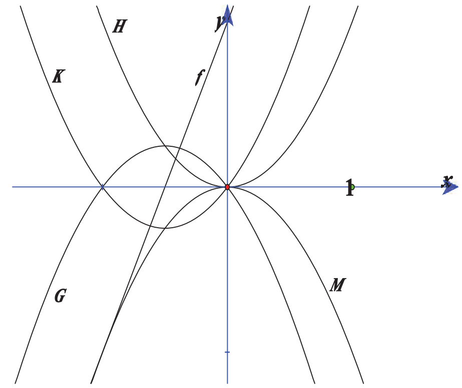


A. M. B. N. C. P. D. Q.

Hướng dẫn:Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của f, ta có $F'(x) = f$. Ta thấy đồ thị hàm số f nằm trên trục hoành (luôn dương), nên phải tìm đồ thị đồng biến, ta thấy đồ thị M phù hợp.

Đáp án A.

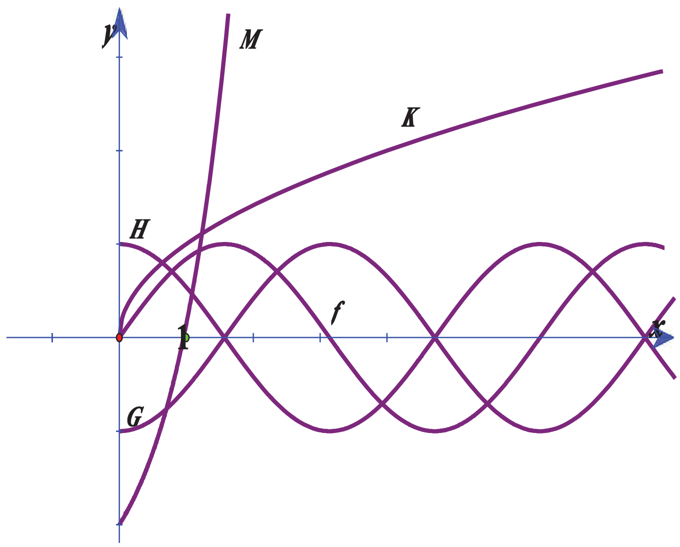
Thí dụ 46: Trong các đồ thị M, G, H, K, đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?



A. M. B. G. C. H. D. K.

Hướng dẫn: Đáp án D.

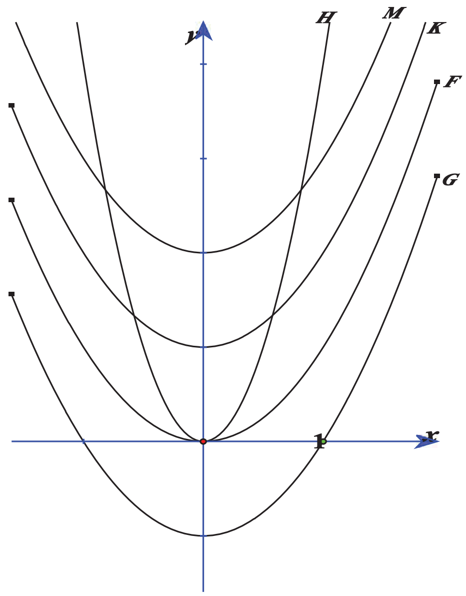
Thí dụ 47: Trong các đồ thị M, G, H, K, đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?



A. M. B. G. C. H. D. K.

Hướng dẫn: Đáp án B.

Thí dụ 48: Biết hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f như hình bên dưới. trong các đồ thị M, H, K, G, đồ thị nào **không** phải là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f?



A. M. B. H. C. K. D. G.

Hướng dẫn: Giả sử hàm số $F = F(x)$. Ta thấy các đồ thị có phương trình tương ứng là:

$G : F(x) - 1$

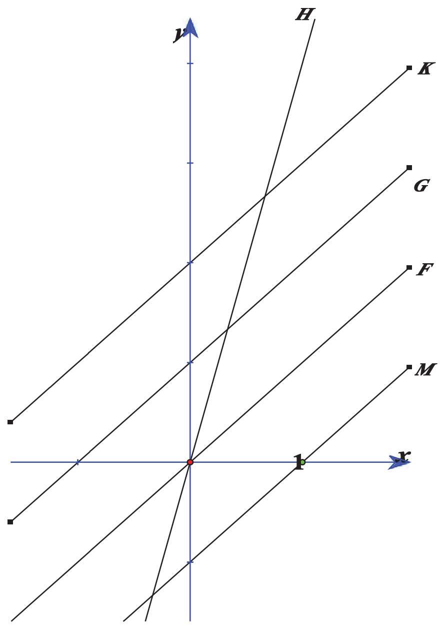
$K : F(x) + 1$

$M : F(x) + 2$

Theo định nghĩa nguyên hàm thì các đồ thị này là đồ thị của các nguyên hàm của f.

Vậy chọn đáp án B.

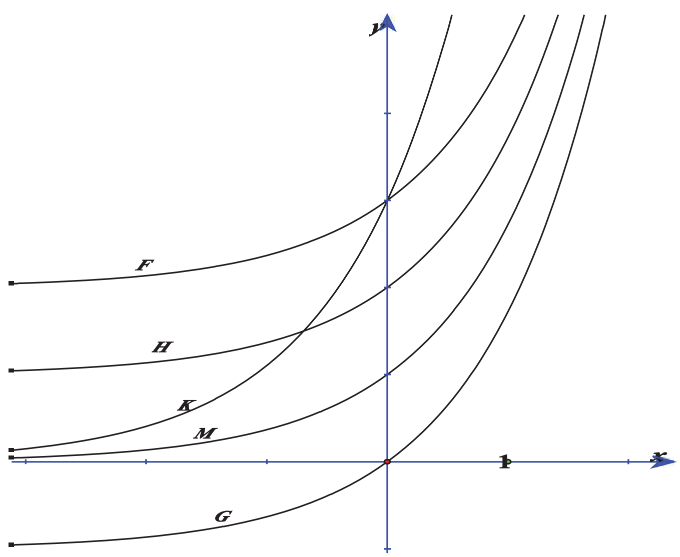
Thí dụ 49: Biết hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f như hình bên dưới. trong các đồ thị M, H, K, G, đồ thị nào **không** phải là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f?



A. M. B. H. C. K. D. G.

Hướng dẫn: đáp án B.

Thí dụ 50: Biết hàm số M là một nguyên hàm của hàm số f như hình bên dưới. trong các đồ thị F, H, K, G, đồ thị nào **không** phải là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f?

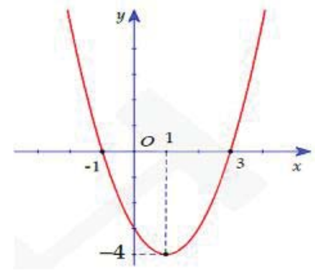


A. F. B. H. C. K. D. G.

Hướng dẫn: đáp án C.

Dạng 5: Một số dạng toán khác liên quan đến đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Thí dụ 82: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



A. 2. B. 27. C. 29. D. 35.

Hướng dẫn:

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua 3 điểm $(-1;0),(3,0),(1,-4)$ ta tìm được:

$a = \dfrac{1}{3}; b = -1; c = -3$.

Suy ra: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương nên ta có:

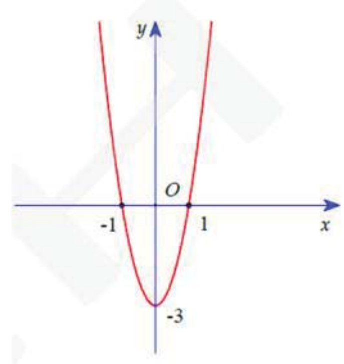
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3 \Rightarrow x = 3.$

Như vậy (C) đi qua điểm $(3;-9)$ ta tìm được $C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Xét phương trình trình hoành độ giao điểm và trục hoành:

$\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

$S = \displaystyle\int_{\frac{3-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}} \left|\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right| dx = 29,25.$ Ta chọn đáp số C.



Thí dụ 83: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị

(C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?

A. $S=9$. B. $S=\frac{27}{4}$. C. $S=\frac{21}{4}$. D. $S=\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn:

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol có trục đối xứng là trục tung nên $b=0$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 2 điểm $(1;0),(0,-3)$ ta tìm được: $a=1;c=-3$.

Suy ra: $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm nên ta có:

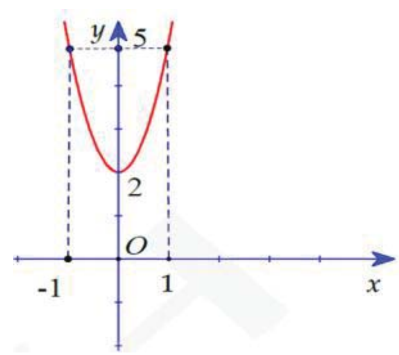
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1; x=1 \Rightarrow x=-1$.

Như vậy (C) đi qua điểm $(-1;4)$ ta tìm được $C=2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$.

Xét phương trình trình hoành độ giao điểm và trục hoành:
$x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1; x=2$.

$S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|dx=\frac{27}{4}$. Ta chọn đáp số B.

Thí dụ 84: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c\in\mathbb{R};a\neq 0\right)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc toạ độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $f(3)-f(1)$?



A. 24. B. 28. C. 26. D. 21.

Hướng dẫn:

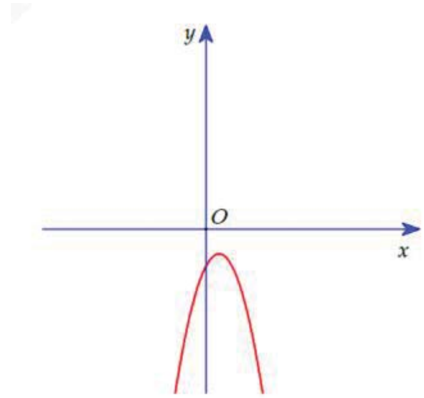
Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol có trục đối xứng là trục tung nên $b=0$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua 2 điểm $(1;5),(0;2)$ ta tìm được: $a=1;c=2$.

Suy ra: $f'(x)=3x^2+2 \Rightarrow f(x)=x^3+2x+C$, đồ thị hàm số (C) đi qua gốc toạ độ nên $C=0 \Rightarrow f(x)=x^3+2x \Rightarrow f(3)-f(2)=21$. Ta chọn đáp án D.

Hoặc : $f'(x)=3x^2+2 \Rightarrow f(3)-f(2)=\int_2^3 f'(x)dx=21$.

Thí dụ 85: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c\in\mathbb{R};a\neq 0\right)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Hàm số (C) có thể là hàm số nào trong các hàm số sau đây ?

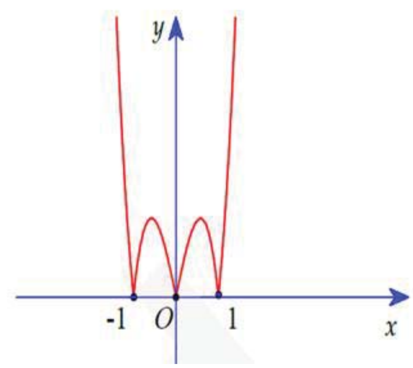


A. $y=-x^3+2x^2+x+2$.
B. $y=x^3-2x^2-1$.
C. $y=-x^3+2x^2-x+2$.
D. $y=-x^3+x^2-x+2$.

Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)<0;\forall x\in\mathbb{R}$ ta suy ra hàm số (C) có $a<0$ và $y'=0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép. Ta chọn đáp án D.

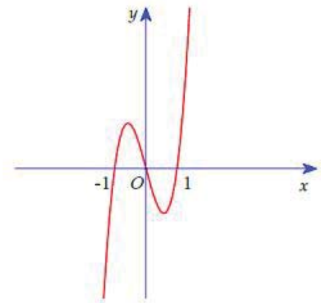
Thí dụ 86: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=\left|f'(x)\right|$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{8}{15}$. C. $\frac{14}{15}$. D. $\frac{16}{15}$.

Hướng dẫn:

Từ đồ thị của hàm số $y=\left|f'(x)\right|$ và $a>0$ ta dễ dàng có được đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau:



Ta có

$f'(x)=4ax^3+2bx$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua $(1;0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$ ta tìm được

$a=1;b=-2\Rightarrow f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+C$.

Do (C) tiếp xúc với trục hoành nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm1$. Do (C) đối xứng qua trục tung nên (C) tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm $(1;0),(-1;0)$.

Do đó: $f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+1$.

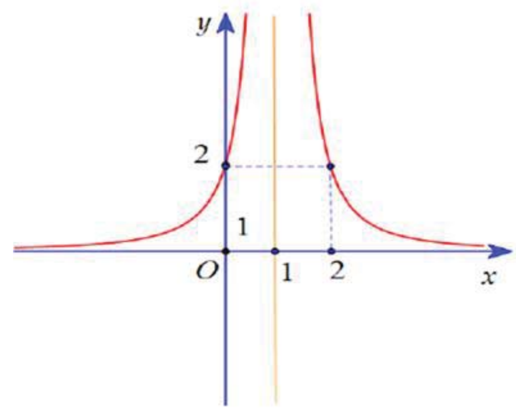
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$x^4-2x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

$S=\int_{-1}^{1}\left|x^4-2x^2+1\right|dx=\frac{16}{15}$. Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 87: Cho hàm số

$y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\left(a,b,c,d\in\mathbb{R};\frac{-d}{c}\neq0\right)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành ?



A. $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$. B. $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. C. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. D. $y=-\frac{1}{2}x+2$.

Hướng dẫn:

Ta có $y'=f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow\frac{-d}{c}=1\Rightarrow c=-d$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua điểm

$(2;2) \Rightarrow \dfrac{ad-bc}{(2c+d)^2} = 2 \Leftrightarrow ad - bc = 2(2c+d)^2$

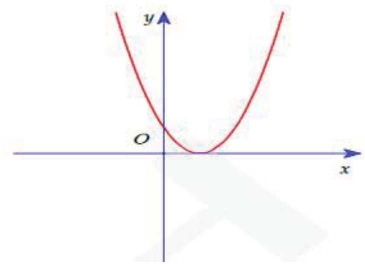
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua điểm $(0;2) \Rightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2} = 2 \Leftrightarrow ad - bc = 2d^2$

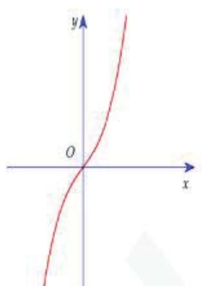
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0;3) \Rightarrow \dfrac{b}{d} = 3 \Leftrightarrow b = 3d$.

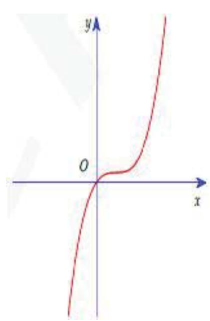
Giải hệ gồm 4 pt này ta được $a = c = -d; b = 3d$. Ta chọn

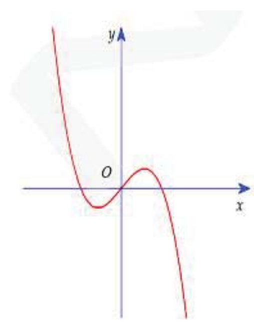
$a = c = 1; b = -3; d = -1 \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{x-1}$. Ta chọn đáp án A.

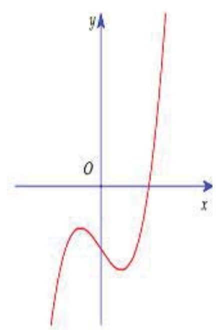
Thí dụ 88: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Đồ thị (C) có thể là hình nào sau đây ?









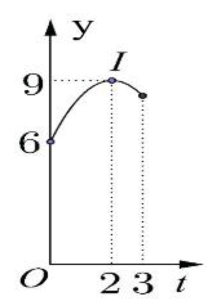


Hình 1. Hình 2. Hình 3. Hình 4.

A. Hình 4. B. Hình 3. C. Hình 2. D. Hình 1.

Hướng dẫn:

Ta có $f'(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có $a > 0; f'(x) = 0$ có nghiệm kép. Ta chọn đáp án C.



Thí dụ 89: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

A. $s = 24,25$ (km) **B.** $s = 26,75$ (km) **C.** $s = 24,75$ (km) **D.** $s = 25,25$ (km)

Hướng dẫn:

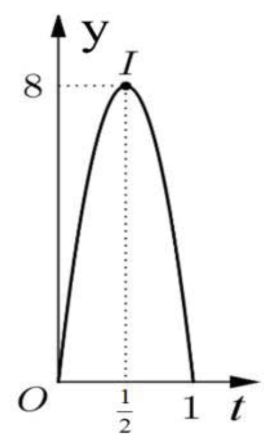
Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c \ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c = 6 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ \dfrac{-b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ b = 3 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = \dfrac{-3}{4}t^2 + 3t + 6$.

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$s = \int_0^3 \left(\dfrac{-3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = \dfrac{99}{4} \approx 24,75.$ Ta chọn đáp án C.

Thí dụ 90: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



A. $s = 4,0$ (km) **B.** $s = 2,3$ (km)

C. $s = 4,5$ (km) **D.** $s = 5,3$ (km)

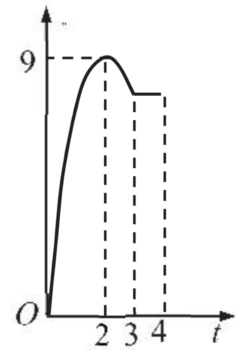
Hướng dẫn:

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c \ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c = 0 \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c = 8 \\ \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 32 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -32t^2 + 32t$.

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 45 phút là:

$$s=\int_0^{3/4}\left(-32t^2+32t\right)dt=\frac{9}{2}=4,5.$$ Ta chọn đáp án C.



Thí dụ 91: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó**?**

A. $26,5$ (km) **B.** $28,5$ (km) **C.** 27 (km) **D.** 24 (km)

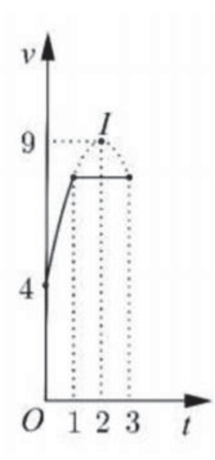
Hướng dẫn:

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t)=at^2+bt+c\ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=9 \\ \dfrac{-b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=9 \\ a=\dfrac{-9}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t)=\dfrac{-9}{4}t^2+9t$.

Ta có $v(3)=\dfrac{27}{4}$ suy ra phương trình chuyển động của vật tốc theo đường thẳng là $y=\dfrac{27}{4}$. Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$$s=\int_0^3\left(\frac{-9}{4}t^2+9t\right)dt+\int_3^4\frac{27}{4}dt=27.$$ Ta chọn đáp án C.



Thí dụ 92: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $s = 23,25$ (km) B. $s = 21,58$ (km)

C. $s = 15,50$ (km) D. $s = 13,83$ (km)

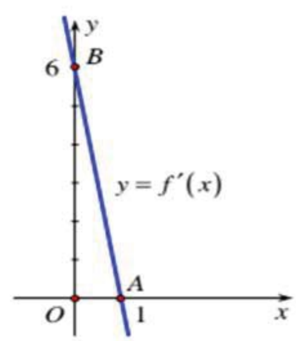
Hướng dẫn: Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c \ (km/h)$.

Ta có: $\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ \dfrac{-b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = 5 \\ a = \dfrac{-5}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = \dfrac{-5}{4}t^2 + 5t + 4$.

Ta có $v(1) = \dfrac{31}{4}$ suy ra phương trình chuyển động của vật tốc theo đường thẳng là $y = \dfrac{31}{4}$. Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$s = \int_0^1 \left(\dfrac{-5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \dfrac{31}{4} dt = \dfrac{259}{12} \approx 21,58.$ Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 93: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) = 5$, tính giá trị của $f(1)$?



A. 0. B. 3. C. 8. D. 11.

Hướng dẫn:

Cách 1 : $f'(x) = ax + b$. Theo hình vẽ ta tìm được $f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + c$

Mà $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(1) = 8.$

Cách 2 : $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx = S_{OAB} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 + 5 = 8.$