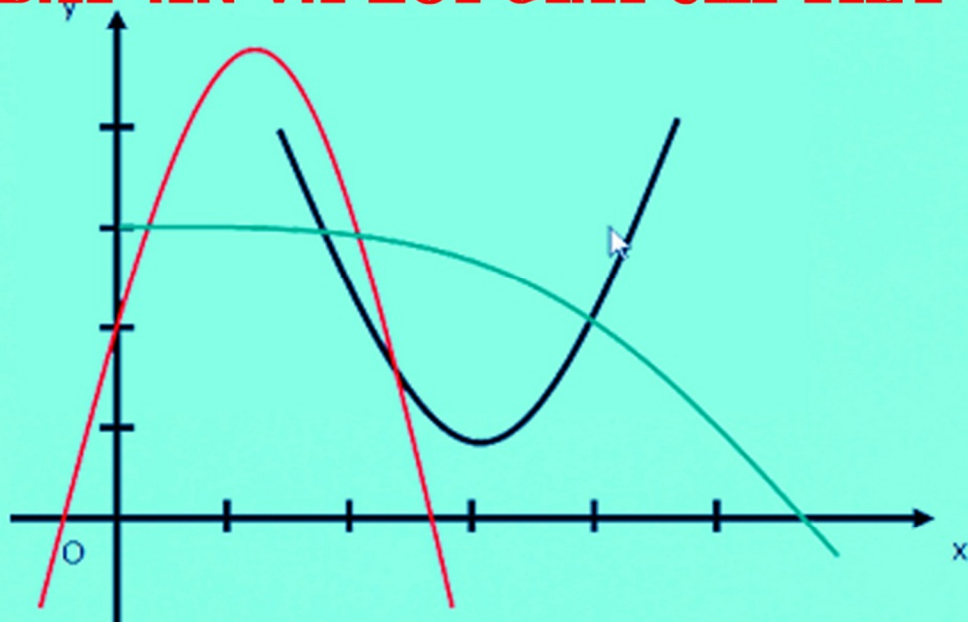


ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

NEW!

CHUYÊN ĐỀ
HÀM SỐ

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT



ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2017 - 2018

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT****I. Định nghĩa.**

Giả sử hàm số f xác định trên tập K ($K \subset \mathbb{R}$). Khi đó:

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in K$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số f trên K . Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in K$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số f trên K . Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

II. Nhận xét.

1. Như vậy để có được M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên K ta phải chỉ ra được:

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in K$.

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in K$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

2. Chú ý khi nói đến giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói rõ “trên tập K ”) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó.

3. Mỗi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Hơn nữa

a) Nếu hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{x \in D} f(x) = f(b)$ và $\min_{x \in D} f(x) = f(a)$.

b) Nếu hàm số f nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{x \in D} f(x) = f(a)$ và $\min_{x \in D} f(x) = f(b)$.

4. Cho phương trình $f(x) = m$ với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên D thì phương trình có nghiệm khi $\min_D f(x) \leq m \leq \max_D f(x)$

5. Một hàm số có thể đồng thời đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một tập K hoặc chỉ đạt được giá trị nhỏ nhất hoặc chỉ đạt được giá trị lớn nhất hoặc không tồn tại cả hai giá trị này. Chẳng hạn:

a) Xét hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ trên tập xác định $K = \mathbb{R}$.

+ Khi $a > 0$ thì hàm số có đạt được giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{-b}{2a}$ đồng thời bằng giá trị cực tiểu của hàm số tại $x = \frac{-b}{2a}$.

+ Khi $a < 0$ thì hàm số có đạt được giá trị lớn nhất tại $x = \frac{-b}{2a}$ đồng thời bằng giá trị cực đại của hàm số tại $x = \frac{-b}{2a}$.

b) Xét trên tập $K = \mathbb{R}$ hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

c) Xét trên $K = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{c}{d} \right\}$ hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

d) Xét hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ trên tập xác định $K = \mathbb{R}$.

+ Khi $a > 0$ thì hàm số đạt được giá trị nhỏ nhất đồng thời bằng giá trị cực tiểu của hàm số.

+ Khi $a < 0$ thì hàm số đạt được giá trị lớn nhất đồng thời bằng giá trị cực đại của hàm số.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$.

- Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a, b]$.
- Giả sử phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [a, b]$.
- Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)$. So sánh chúng và kết luận.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn nghịch biến trên $[a; b]$. Hỏi hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào sau đây?

A. $x = a$.

B. $x = b$.

C. $x = \frac{a+b}{2}$.

D. $x = \frac{b-a}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có: $y = f(x)$ liên tục và luôn nghịch biến trên $[a; b] \Rightarrow \forall x \in [a; b]$ thì $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = a$.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 12x + 2$ trên đoạn $[1; 4]$ là

A. 13.

B. 2.

C. -14.

D. 18.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Ta có $y' = -3x^2 + 12$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$. Do $x \in [1; 4]$ nên $x = 2$.

$y(1) = 13, y(2) = 18, y(4) = -14$. Vậy $\min_{[1;4]} y = y(4) = -14$.

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ bằng:

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$y(1) = 1; y(-1) = 5; y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}$. Vậy $\max_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} f(x) = 5$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\max_{[0;2]} y = \frac{2}{3}; \min_{[0;2]} y = -\frac{5}{3}$.

B. $\max_{[0;2]} y = \frac{2}{3}; \min_{[0;2]} y = 0$.

C. $\max_{[0;2]} y = 9; \min_{[0;2]} y = -\frac{5}{3}$.

D. $\max_{[0;2]} y = 9; \min_{[0;2]} y = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Hàm số liên tục và xác định trên $[0; 2]$.

$$y' = x^2 + 2x - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ (do } x \in [0; 2]).$$

$$y(0) = 0, y(1) = -\frac{5}{3}, y(2) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;2]} y = \frac{2}{3}, \min_{[0;2]} y = -\frac{5}{3}.$$

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là

A. $-\frac{5}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $-\frac{1}{6}$.

D. $-\frac{13}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $y' = -x^2 - x + 2$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \text{ (loại)}.$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}; y(1) = \frac{1}{6}; y(2) = -\frac{5}{3};$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} y = y(1) = \frac{1}{6}.$$

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 4$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

A. $\max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -\frac{37}{8}; \min_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -8$.

B. $\max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -4; \min_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -\frac{37}{8}$.

C. $\max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -\frac{37}{8}; \min_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -4$.

D. $\max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -4; \min_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 4$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in \left[\frac{1}{2}; 3\right] \\ x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}; 3\right] \end{cases}.$$

Do $y(2) = -8$; $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{38}{7}$; $y(3) = -4$ nên $\max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -4$; $\min_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} y = -8$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

A. $\min_{[-2; 2]} y = -\frac{29}{3}$.

B. $\min_{[-2; 2]} y = -3$.

C. $\min_{[-2; 2]} y = -\frac{251}{24}$.

D. $\min_{[-2; 2]} y = -\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$$\text{Ta có } y' = 2x^2 - 3x - 5 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = \frac{5}{2} \notin [-2; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Do } y(-1) = \frac{26}{3}; y(2) = -\frac{29}{3}; y(-2) = -\frac{1}{3} \text{ nên } \min_{[-2; 2]} y = -\frac{29}{3}.$$

Câu 8. Tìm M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là:

A. $M = 40; m = -41$.

B. $M = 40; m = -8$.

C. $M = -41; m = 40$.

D. $M = 15; m = -8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-4; 4]$

$$y' = 3x^2 - 6x - 9. y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-4) = -41; y(4) = 15; y(-1) = 40; y(3) = 8$$

$$\text{Vậy } M = \max_{[-4; 4]} y = 40 \text{ và } m = \min_{[-4; 4]} y = -41.$$

Câu 9. Hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 5$ có giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M trên đoạn $[1; 3]$. Khi đó tổng $m + M$ bằng

A. $-\frac{338}{27}$.

B. $-\frac{446}{27}$.

C. -10 .

D. $-\frac{14}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$y = x^3 - 2x^2 - 7x + 5$$

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$y' = 3x^2 - 4x - 7$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(l) \\ x = \frac{7}{3}(n) \end{cases}$$

$$y(1) = -3, y(3) = -7, y\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{-257}{27} \Rightarrow m = \frac{-257}{27}; M = -3 \Rightarrow m + M = -\frac{338}{27}.$$

Câu 10. Gọi m là giá trị nhỏ nhất và M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. Tính giá trị của $M - m$

A. -5.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$\text{Ta có : } y' = 6x^2 + 6x \quad ; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$$

$$y(-2) = -5 \quad ; y(-1) = 0 \quad ; y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó : } M = 0, m = -5 \Rightarrow M - m = 5.$$

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = 3x^2 + 4x - 7. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -\frac{7}{3}(l) \end{cases}$$

$$f(0) = 1, f(2) = 3, f(1) = -3.$$

$$\text{Vậy: } \max_{[0;2]} f(x) = 3.$$

Câu 12. Tìm giá trị lớn nhất của hàm $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

A. $\max_{[-1;2]} y = 6.$ B. $\max_{[-1;2]} y = 10.$ C. $\max_{[-1;2]} y = 15.$ D. $\max_{[-1;2]} y = 11.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 2] \text{ hoặc } x = -2 \notin [-1; 2].$$

$$f(-1) = 15; f(2) = 6; f(1) = -5.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;2]} y = f(-1) = 15.$$

Câu 13. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x$ trên đoạn $[0; 38]$. Tìm giá trị m

A. $m = 0.$ B. $m = -1.$ C. $m = -2.$ D. $m = 1.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 38] \\ x = -1 \notin [0; 38] \end{cases}$$

$$y(0) = 0; y(1) = -2; y(38) = 54758.$$

Vậy $m = -2$

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - x^2 - 8x$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max_{[1;3]} y = -4$.

B. $\max_{[1;3]} y = -8$.

C. $\max_{[1;3]} y = -6$.

D. $\max_{[1;3]} y = \frac{176}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Hàm số xác định và liên tục trên $[1;3]$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x - 8$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$. Do $x \in [1;3]$ nên $x = 2$.

$y(1) = -8, y(2) = -12, y(3) = -6$. Vậy $\max_{[1;3]} y = y(3) = -6$.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$. Tính giá trị $T = M + m$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có : $y' = 3x^2 - 6x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Xét $x \in [1;3]$: ta có $x = 0$ (loại); $x = 2$ (nhận).

Ta có : $y(1) = 1; y(2) = -1; y(3) = 3$.

Suy ra $M = 3; m = -1$. Do đó : $T = 2$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$

A. $\max_{[0;2]} y = 3$ và $\min_{[0;2]} y = 1$.

B. $\max_{[0;2]} y = 1$ và $\min_{[0;2]} y = -1$.

C. $\max_{[0;2]} y = 3$ và $\min_{[0;2]} y = -1$.

D. $\max_{[0;2]} y = 9$ và $\min_{[0;2]} y = -3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Xét trên đoạn $[0; 2]$ ta chỉ nhận $x = 1$.

Khi đó ta có $y(0) = 1, y(2) = 3, y(1) = -1$.

Vậy ta có $\max_{[0;2]} y = 3$ và $\min_{[0;2]} y = -1$.

Câu 17. Trên đoạn $[-1;1]$, hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 3$

A. Có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

B. Có giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

C. Có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và không có giá trị lớn nhất.

D. Không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$.

Ta có $y' = -4x^2 - 4x - 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } y(1) = -\frac{22}{3}, y(-1) = -\frac{8}{3}, y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{6}.$$

Câu 18. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tìm tổng bình phương của M và m

A. 250.

B. 100.

C. 509.

D. 289.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

$$y' = 6x^2 + 6x - 12.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(N) \\ x = -2(L) \end{cases}.$$

$$y(1) = -5; y(-1) = 15; y(2) = 6.$$

$$\text{Vậy: } m^2 + M^2 = (-5)^2 + 15^2 = 250.$$

Câu 19. Tìm các giá trị của a để trên đoạn $[-1; 1]$ hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2

A. $a = 6$.

B. $a = 8$.

C. $a = 2$.

D. $a = 4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có: } y' = -3x^2 - 6x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(N) \\ x = -2(L) \end{cases}.$$

$$y(1) = -4 + a, y(-1) = -2 + a, y(0) = a.$$

Trên đoạn $[-1; 1]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

$$\text{Suy ra } \min y = y(1) \Leftrightarrow -4 + a = 2 \Leftrightarrow a = 6.$$

Câu 20. Hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt GTNN bằng 5 trên $[0; 1]$. Khi đó giá trị của m là

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Ta có $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in [0; 1]$ nên hàm số luôn đồng biến trên $[0; 1]$.

Vì hàm số đã cho là hàm đa thức, liên tục trên $[0; 1]$ nên $\min_{x \in [0; 1]} y = y(0) = m + 1$.

$$\text{Ta cho } m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy $m = 4$ thỏa mãn.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Tìm tập hợp tất cả giá trị $m > 0$, để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $D = [m + 1; m + 2]$ luôn bé hơn 3 là

A. $(0; 1)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $(-\infty; 1) \setminus \{-2\}$.

D. $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có : $y' = 3x^2 - 3$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Trên $D = [m+1; m+2]$, với $m > 0$, ta có : $\min_{[m+1; m+2]} y = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$

Ycbt $\Leftrightarrow \min_{[m+1; m+2]} y < 3 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+2)^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện . Suy ra $m \in (0; 1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$

A. $\min y = -2$.
 $[-1; 2]$

B. $\min y = 2$.
 $[-1; 2]$

C. $\min y = 1$.
 $[-1; 2]$

D. $\min y = -1$.
 $[-1; 2]$

Hướng dẫn giải:

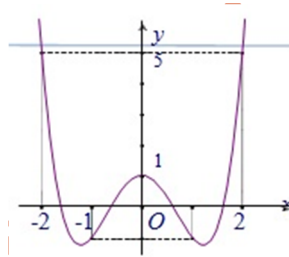
Chọn đáp án D.

Ta có : +) $y' = 4x^3 + 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+) $y(0) = -1$, $y(-1) = 2$, $y(2) = 23$

Vậy $\min y = -1$
 $[-1; 2]$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$.



A. 1.

B. 2.

C. 5.

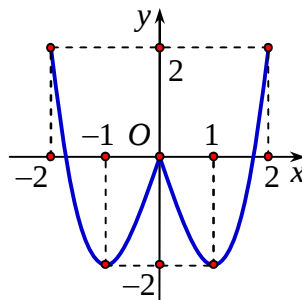
D. 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Trên đoạn $[-1; 2]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5 tại $x = 2$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị trên đoạn $[-2; 2]$ như sau:.



Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(2)$.

B. $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(-2)$.

C. $\min_{[-2; 2]} f(x) = f(1)$.

D. $\min_{[-2; 2]} f(x) = f(0)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$\min_{[-2;2]} f(x) = f(\pm 1)$$

Câu 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$y = x^4 - 4x^2 + 5 \text{ suy ra } y' = 4x^3 - 8x. \text{ Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$y(-1) = 2, y(0) = 5, y(\sqrt{2}) = 1, y(2) = 5. \text{ Vậy GTNN là } 1.$$

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$

A. $-\frac{1}{3}$.

B. -5.

C. 5.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \neq 3.$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} y = y(0) = \frac{1}{3}.$$

Câu 27. Xét hàm số $y = \frac{4x-1}{x}$ trên đoạn $[-2; -1]$. Hãy chọn khẳng định đúng

A. $\max_{[-2;-1]} y = \frac{9}{2}$.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất.

D. $\min_{[-2;-1]} y = \frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \neq 0.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } [-2; -1] \text{ và } y(-2) = \frac{9}{2}, y(-1) = 5.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-2;-1]} y = \frac{9}{2}.$$

Câu 28. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

A. GTNN bằng 1; GTLN bằng 3.

B. GTNN bằng 0; GTLN bằng $\frac{2}{7}$.

C. GTNN bằng 0; GTLN bằng 1.

D. GTNN bằng $-\frac{2}{7}$; GTLN bằng 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

$$y' = \frac{3}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$$

$$y(1) = 0, y(3) = \frac{2}{7}.$$

Vậy GTNN bằng 0; GTLN bằng $\frac{2}{7}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Chọn phương án đúng trong các phương án sau:

A. $\min_{x \in [-1; 2]} y = 1.$

B. $\max_{x \in [0; 1]} y = 2.$

C. $\max_{x \in [-1; 0]} y = 0.$

D. $\max_{x \in [3; 5]} y = \frac{2}{3}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Hàm số không liên tục trên đoạn $[-1; 2] \Rightarrow$ Loại đáp án A.

Hàm số không liên tục trên đoạn $[0; 1] \Rightarrow$ Loại đáp án B.

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$ và $\max_{[-1; 0]} y = y(-1) = 0.$

Câu 30. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng:

A. $-\frac{7}{2}.$

B. -5

C. -3

D. $\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

+ $y' = \frac{3}{(1-x)^2} > 0 \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

$\Rightarrow$ hàm số cũng đồng biến trên $[2; 3] \Rightarrow \min_{[2; 3]} y = y(2) = -5.$

Câu 31. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $-5.$

C. $5.$

D. $\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$y' = \frac{-8}{(x-3)^2}$$

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
y'			-		-
y	3			$+\infty$	3

$$y(0) = \frac{1}{3}, y(2) = -5$$

Suy ra $\max_{[0; 2]} y = \frac{1}{3}.$

Câu 32. Kí hiệu m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+3}{2x-1}$ trên đoạn $[1;4]$. Tính giá trị biểu thức $d = M - m$.

- A. $d = 3$. B. $d = 4$. C. $d = 5$. D. $d = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$y' = \frac{-7}{(2x-1)^2} < 0 \forall x \neq \frac{1}{2}$. Suy ra hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định, do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;4]$. Vậy $m = y(4) = 1$; $M = y(1) = 4 \Rightarrow d = M - m = 4 - 1 = 3$.

Câu 33. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$. Hãy tính tích $M.n$.

- A. 2. B. 0. C. -1. D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in [0;2].$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } [0;2] \Rightarrow M = \max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 0, m = \min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2.$$

Vậy $M.n = 0$

Câu 34. Gọi Q là giá trị lớn nhất và K là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$. Khi đó giá trị của biểu thức $\frac{24Q+27K}{2} - 1997$ là:

- A. $-\frac{3923}{2}$. B. $-\frac{3925}{2}$. C. $-\frac{3927}{2}$. D. $-\frac{3929}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$y' \text{ đồng biến trên } [1;2] \text{ nên } \begin{cases} K = y(1) = 1 \\ Q = y(2) = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{24Q+27K}{2} - 1997 = \frac{-3927}{2}.$$

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2+1)x + m + 1$ đạt GTNN bằng 5 trên $[0;1]$.

- A. $\{5\}$. B. $\{3\}$. C. $\{1; -2\}$. D. $\{4\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = 3x^2 + (m^2+1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

$$\max_{[0;1]} y = 5 \text{ khi } x = 1.$$

Thay $x = 1, y = 5$ và hàm số ta được $m = 1; m = -2$.

Câu 36. Giá trị của tham số thực m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng -2 .

là:

A. $m = -3$.

B. $m = 3$.

C. $m = 1$.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$ và $y' = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0, \forall x \in D$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng -2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y(1) = -2 \\ m \notin [1;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{1-m} = -2 \\ m < 1 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 37. Trên đoạn $[2;4]$ hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2. Khi đó :

A. $m = \frac{7}{6}$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Ta có: $y' = \frac{m(x-m)-mx-1}{(x-m)^2} = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0$ với mọi $x \neq m$.

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Do đó trên đoạn $[2;4]$ hàm số nghịch biến. Suy ra $f(2) > f(4)$.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $f(2) = \frac{2m+1}{2-m}$.

$$\Rightarrow \frac{2m+1}{2-m} = 2 \Leftrightarrow 2m+1 = 4-2m \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$$

Lưu ý. Nếu $m \in (2;4)$ thì hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 38. Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$

bằng 1

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$f'(x) = \frac{-m+3}{(x+1)^2}$$

Nếu $-m+3 > 0 \Leftrightarrow m < 3$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó, do đó GTNN

của hàm số trên đoạn $[1;2]$ là $f(1) = \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1 < 3$

Nếu $-m + 3 < 0 \Leftrightarrow m > 3$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó, do đó GTNN của hàm số trên đoạn $[1; 2]$ là $f(2) = \frac{m+3}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 0 < 3$
 Vậy $m = 1$

Câu 39. Giá trị tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 là:

A. $m = 1, m = 2$.

B. $m = \frac{1+\sqrt{21}}{2}, m = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

C. Không có giá trị m

D. $m = -1, m = 2$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$+ D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$+ y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} = \frac{m^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{(x+1)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[0; 1] \Rightarrow \underset{[0;1]}{\text{Min}} y = y(0) = -m^2 + m$.

$+ \text{Theo yêu cầu đề bài ta có: } \underset{[0;1]}{\text{Min}} y = -2 \Rightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 40. Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng -7 .

A. $m = 2$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$f(x) = \frac{mx+5}{x-m} \Rightarrow f'(x) = \frac{m(x-m) - mx - 5}{(x-m)^2} = \frac{-m^2 - 5}{(x-m)^2} < 0 \forall x \neq m$.

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ là

$$f(1) = \frac{m+5}{1-m} = -7 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 41. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên $[-1; 0]$ bằng:

A. $\frac{m^2-1}{2}$.

B. $-m^2$.

C. $\frac{1-m^2}{2}$.

D. m^2

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ có $y' = \frac{-1-m^2}{(x-1)^2} < 0 \forall x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên $[-1; 0]$.

Vậy: $\min_{[-1;0]} f(x) = f(0) = -m^2$.

Câu 42. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ là $-\frac{1}{3}$ khi m nhận giá trị

A. 0.

B. 1.

C. -5.

D. -2.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có: $y' = \frac{2m^2 + 1}{(m-x)^2} > 0, \forall m \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[2; 3]$

$$\Rightarrow \max_{[2;3]} y = y(3) = \frac{6m+1}{m-3} \Rightarrow \frac{6m+1}{m-3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = 0.$$

Câu 43. Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x+2}$, giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên $[-1, 2]$ là

A. $m = \frac{9}{4}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Xét hàm số $y = x + \frac{1}{x+2}$ trên $[-1, 2]$, ta có $y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \notin (-1, 2) \\ x = -1 \notin (-1, 2) \end{cases}$$

Mà $y(-1) = 0$ và $y(2) = \frac{9}{4}$. Do đó $\min_{[-1,2]} y = 0$. Vậy $m = 0$.

Câu 44. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$.

A. $\min_{[0;4]} y = 4$.

B. $\min_{[0;4]} y = \frac{24}{5}$.

C. $\min_{[0;4]} y = -5$.

D. $\min_{[0;4]} y = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$y = x + \frac{4}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \notin [0; 4] \\ x = 1 \in [0; 4] \end{cases}.$$

$$y(0) = 4, y(1) = 3, y(4) = \frac{24}{5}.$$

Vậy $\min_{[0;4]} y = 3$.

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + 1 + \frac{1}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng

A. $\frac{26}{5}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. $\frac{14}{3}$.

D. $\frac{24}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Hàm số $y = 2x + 1 + \frac{1}{2x+1}$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Ta có } y' = 2 - \frac{2}{(2x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -1 \notin [1; 2] \end{cases}.$$

Do $y(1) = \frac{10}{3}$; $y(2) = \frac{26}{5}$ nên $\min_{[1;2]} y = \frac{10}{3}$.

Câu 46. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 5}{x + 3}$ trên đoạn $[0; 2]$

A. $\min_{x \in [0;2]} y = -\frac{1}{3}$.

B. $\min_{x \in [0;2]} y = -\frac{5}{3}$.

C. $\min_{x \in [0;2]} y = -2$.

D. $\min_{x \in [0;2]} y = -10$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Ta có: $y' = \frac{2x(x+3) - (x^2 - 5)}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2}$

Suy ra: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$

Do đó ta có: $f(-1) = -2$, $f(0) = -\frac{5}{3}$, $f(-5) = -10$, $f(2) = -\frac{1}{5}$

Vậy $\min_{x \in [0;2]} y = -10$.

Câu 47. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$.

B. $\min_{[2;4]} y = -3$.

C. $\min_{[2;4]} y = -2$.

D. $\min_{[2;4]} y = 6$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Ta có: $y' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2; 4] \\ x = 3 \in [2; 4] \end{cases}$.

$y(2) = 7$; $y(4) = \frac{19}{3}$; $y(3) = 6$.

$\Rightarrow \min_{[2;4]} y = 6$.

Câu 48. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ là:

A. $\frac{13}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{7}{2}$.

D. -1.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. Do $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ nên $x = 0$.

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$, $y(0) = 3$, $y(1) = \frac{7}{2}$. Vậy $\max_{\left[-\frac{1}{2}; 1\right]} y = \frac{7}{2}$.

Câu 49. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

A. $\min_{[0;3]} y = 0$.

B. $\min_{[0;3]} y = -\frac{3}{7}$.

C. $\min_{[0;3]} y = -4$.

D. $\min_{[0;3]} y = -1$.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án D.**

$$y' = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2(L) \end{cases}$$

$$y(0) = 0; y(1) = -1; y(3) = -\frac{3}{7}$$

Câu 50. Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 3]$ là:

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án D.**

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}. y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -3(l) \end{cases}$$

$$y(0) = 0, y(3) = 0, y(1) = -1.$$

$$\text{Vậy: } \max_{[0;3]} y = 0.$$

Câu 51. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là:

A. $\min_{[2;4]} f(x) = 2; \max_{[2;4]} f(x) = \frac{11}{3}$.

B. $\min_{[2;4]} f(x) = 2\sqrt{2}; \max_{[2;4]} f(x) = 3$.

C. $\min_{[2;4]} f(x) = 2; \max_{[2;4]} f(x) = 3$.

D. $\min_{[2;4]} f(x) = 2\sqrt{2}; \max_{[2;4]} f(x) = \frac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án D.**

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f(2) = 3; f(4) = \frac{11}{3}; f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\min_{[2;4]} f(x) = 2\sqrt{2}; \max_{[2;4]} f(x) = \frac{11}{3}.$$

Câu 51. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$ trên đoạn $[-2; 0]$ là:

A. 2.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án B.**

$$y' = \frac{(2x + 3)(x - 2) - (x^2 + 3x - 1)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5(\text{loại}) \end{cases}$$

$$y(-2) = \frac{3}{4}, y(0) = \frac{1}{2}, y(-1) = 1.$$

Vậy $\text{Max}_{y=1}$.
 $x \in [-2; 0]$

Câu 52. Kết luận nào là đúng về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$?

- A. Có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- B. Có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
- C. Có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- D. Không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Tập xác định $D = [0; 1]$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 1]$ nên luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[0; 1]$.

Vậy $\min_{y=7}$.
 $[-4; -2)$

Câu 53. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3 + \sqrt{4 - x^2}$ lần lượt là

- A. -3 và 0.
- B. -3 và -1.
- C. 0 và 2.
- D. -2 và 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.

$$y = -3 + \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f(0) = -1$$

$$f(2) = f(-2) = -3.$$

Câu 54. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{6 - x} - \sqrt{x + 4}$ đạt tại x_0 , tìm x_0 ?

- A. $x_0 = -\sqrt{10}$.
- B. $x_0 = -4$.
- C. $x_0 = 6$.
- D. $x_0 = \sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

TXD: $-4 \leq x \leq 6$.

Ta có $y' = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0, \forall x \in (-4; 6)$, do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -4$.

Câu 55. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ là:

- A. 4.
- B. 0.
- C. -2.
- D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

+ TXD: $D = [0; 4]$.

$$+ y' = \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}}, y' = 0 \Leftrightarrow -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

+ Ta có:
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(4) = 0 \Rightarrow y_{\max} = 2. \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

Câu 56. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5x^2 + 4}$ trên đoạn $[-3; 1]$

A. $\min_{[-3;1]} y = 3.$

B. $\min_{[-3;1]} y = 7.$

C. $\min_{[-3;1]} y = 2.$

D. $\min_{[-3;1]} y = 0.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Cách 1: $y = \sqrt{5x^2 + 4}$

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 1]$.

$y' = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 4}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-3; 1].$

Ta có:
$$\begin{cases} y(-3) = 7 \\ y(0) = 2 \\ y(1) = 3 \end{cases} \text{ . Vậy } \min_{[-3;1]} y = 2 .$$

Cách 2: Sử dụng bảng MTCT

Câu 57. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$ trên đoạn $[-3; 6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là:

A. 18.

B. -6.

C. -12.

D. -4.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Xét: $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$

Ta có: $f'(x) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6-x}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{6-x} + 1}{\sqrt{6-x}}$. $f'(x)$ vô nghiệm trên $[-3; 6]$.

$f(-3) = -18, f(6) = 12.$

Vậy: $M + m = -6.$

Câu 58. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ trên đoạn $[1; 3]$

A. $\max_{[1;3]} y = 2.$

B. $\max_{[1;3]} y = \sqrt{2}.$

C. $\max_{[1;3]} y = -\sqrt{2}.$

D. $\max_{[1;3]} y = -2.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có hàm số đã cho xác định trên đoạn $[1; 3]$. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 2 \in [1; 3]$

Khi đó. $y(1) = y(3) = \sqrt{2}; y(2) = 2.$ Vậy $\max_{x \in [1;3]} y = 2.$

Câu 59. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ trên đoạn $[1; 5]$ lần lượt là:

A. 2 và 0.

B. 4 và 0.

C. 3 và 0.

D. 0 và -2.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**

Ta có $y' = \frac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in (1;5)$.

Vì $y(1) = y(5) = 0$ và $y(3) = 2$ nên giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;5]$ lần lượt là 2 và 0.

Câu 60. Cho hàm số $y = 5\sqrt{3-x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số**A.** 3.**B.** 2**C.** 0.**D.** 5.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án C.**

TXD: $x \leq 3$. Xét hàm số liên tục $y = 5\sqrt{3-x}$ trên $(-\infty; 3]$ ta có :

$y' = \frac{-5}{2\sqrt{3-x}} < 0, \forall x \in (-\infty; 3]$ từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min y = f(3) = 0$.

Câu 61. Hàm số $y = 4\sqrt{x^2-2x+3} + 2x - x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x_1, x_2 . Tính $x_1 x_2$.**A.** 2.**B.** 1.**C.** 0.**D.** -1.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án D.**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{4(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+3}} + 2 - 2x = \frac{2(x-1)(2-\sqrt{x^2-2x+3})}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2-\sqrt{x^2-2x+3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{x^2-2x+3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=1+4\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2}, y=7 \\ x=1-\sqrt{2}, y=7 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	-
y	$-\infty$	$\nearrow 7$		$\searrow +4\sqrt{2}$		$\nearrow 7$	$\searrow -\infty$

Suy ra hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x_1 = 1-\sqrt{2}, x_2 = 1+\sqrt{2}$. Do đó, $x_1 x_2 = -1$.

Câu 62. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\sin x - \cos 2x$ là:**A.** -6.**B.** -7.**C.** -4.**D.** 3.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án C.**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = 5\sin x - \cos 2x = 5\sin x - 1 + 2\sin^2 x$.

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$.

Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : $g(t) = 2t^2 + 5t - 1$ trên $[-1; 1]$.

$$g'(t) = 4t + 5; g'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{4} (L).$$

$$g(-1) = -4 ; g(1) = 6 ;$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -4 .

Câu 63. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x + 4\cos x$

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = -2$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 7$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

$$\text{Ta có : } y = 2\cos^2 x + 4\cos x = 2(\cos x + 1)^2 - 2.$$

$$\text{Vì } -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq (\cos x + 1)^2 \leq 4. \text{ Do đó : } -2 \leq y \leq 6.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = -2$ khi $\cos x = -1$.

Câu 64. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos 2x + 4\cos x + 1$.

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$.

B. $\max_{\mathbb{R}} y = 6$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 7$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

$$y = \cos 2x + 4\cos x + 1 = 2\cos^2 x + 4\cos x.$$

Đặt $t = \cos x (-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó

$$y = f(t) = 2t^2 + 4t \Rightarrow f'(t) = 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -2 = \min_{[-1;1]} f(t) = \min_{\mathbb{R}} f(x) \\ f(1) = 6 = \max_{[-1;1]} f(t) = \max_{\mathbb{R}} f(x) \end{cases}.$$

Câu 65. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{9}{2}\cos^2 x + 3\cos x + \frac{1}{2}$ là:

A. 1.

B. -24 .

C. -12 .

D. -9 .

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \cos x, t \in [-1; 1]. \text{ Hàm số trở thành } y = 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } y' = 6t^2 - 9t + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$y(1) = 1, y(-1) = -9, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất là -9 .

Câu 66. Cho hàm số $y = |3\cos x - 4\sin x + 8|$ với $x \in [0; 2\pi]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$.

B. $7\sqrt{3}$.

C. $8\sqrt{3}$.

D. 16.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

$$\text{Ta có } y = |3\cos x - 4\sin x + 8| = |5\sin(\alpha - x) + 8| = 5\sin(\alpha - x) + 8, \forall x \in [0; 2\pi]$$

$$\text{Do } 3 \leq 5\sin(\alpha - x) + 8 \leq 13 \Rightarrow 3 \leq y \leq 13, \forall x \in [0; 2\pi]$$

$$\text{Vậy } M + m = 16$$

Câu 67. Tìm giá trị lớn nhất $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. π .

B. 0.

C. $\frac{\pi}{2}$.D. $\frac{\pi}{4}$.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án C.**Hàm số $f(x)$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = 1 - 2\sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2 \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Vậy } \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 68. Tìm M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

A. $M = \frac{\pi}{4} + 1; m = \sqrt{2}$.B. $M = \frac{\pi}{2}; m = \sqrt{2}$.C. $M = 1; m = 0$.D. $M = \sqrt{2}; m = 1$.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án A.**Xét hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{2} \cos x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 1 - \sqrt{2} \sin x$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ta có: } f(0) = \sqrt{2}, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất } M = \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} = \frac{\pi}{4} + 1, \text{ đạt giá trị nhỏ nhất } \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} = \sqrt{2}.$$

Câu 69. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bằng:

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 7.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án C.**Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$;Ta có: $y' = 3t - 4t^3$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3t - 4t^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (nhận cả 3 nghiệm)} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$y(1) = -1; y(-1) = 1; y(0) = 0; y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0; y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0;$$

Vậy $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} y = 1$.

Câu 70. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau: $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$ là:

A. $\max y = \frac{1}{3}$.

B. $\max y = -\frac{1}{3}$.

C. $\min y = -3$.

D. $\min y = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

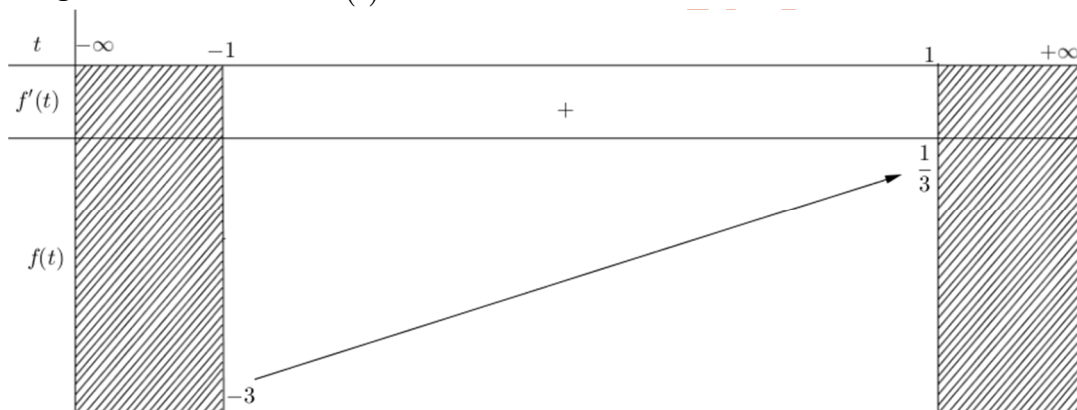
Chọn đáp án A.

- TXĐ: $\mathbb{R}$.

- Đặt: $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1; 1]$. Khi đó: $y = \frac{2t-1}{t+2} = f(t)$.

- Ta có: $f'(t) = \frac{5}{(t+2)^2} > 0, \forall t \in [-1; 1]$.

- Ta có bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên $[-1; 1]$:



- Từ bảng biến thiên ta suy ra:

• $\max y = \max_{[-1; 1]} f(t) = f(1) = \frac{1}{3}$.

• $\min y = \min_{[-1; 1]} f(t) = f(-1) = -3$.

Câu 71. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau: $y = \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$ là:

A. $\begin{cases} \max y = 2 \\ \min y = \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} \max y = 2 \\ \min y = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \max y = 1 \\ \min y = \frac{-1}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} \max y = 2 \\ \min y = \frac{-1}{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

- TXĐ: $\sin x - 2\cos x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

- Khi đó: $y(\sin x - 2\cos x + 3) = 2\sin x + \cos x + 1 \Leftrightarrow (y-2)\sin x - (2y+1)\cos x = 1-3y$ (*)

- Đề (*) có nghiệm thì: $(1-3y)^2 \leq (y-2)^2 + [-(2y+1)]^2 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq y \leq 2$.

$$\Rightarrow \text{Từ đây suy ra: } \begin{cases} \max y = 2 \\ \min y = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Câu 72. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. $\frac{1}{e}$. B. e . C. $\frac{\ln 3}{3}$. D. $24, 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Với $x \in [1; e)$ thì $f'(x) > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1; e)$.

Với $x \in (e; 3]$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $(e; 3]$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ là $f(e) = \frac{1}{e}$.

Câu 73. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x(2 - \ln x)$ trên $[2; 3]$ là

- A. 1. B. $4 - 2\ln 2$. C. e . D. $-2 + 2\ln 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Xét hàm số liên tục và xác định trên $[2; 3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 2 - \ln x, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2; 3].$$

$$y(2) = 2(2 - \ln 2), \quad y(3) = 3(2 - \ln 3), \quad y(e) = e.$$

$$\text{Vậy } \min_{[2; 3]} y = y(2) = 2(2 - \ln 2).$$

Câu 74. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \ln(1 - 2x)$ trên $[-1; 0]$

- A. $\min_{x \in [-1; 0]} = -2 + \ln 3$. B. $\min_{x \in [-1; 0]} = 0$. C. $\min_{x \in [-1; 0]} = -1$. D. $\min_{x \in [-1; 0]} = 2 + \ln 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$\text{Xét } f(x) = y = 2x + \ln(1 - 2x)$$

$$\text{TXĐ: } D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{1 - 2x}$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 - 2x) - 2}{1 - 2x} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1; 0]$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(-1) = -2 + \ln 3 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min_{[-1; 0]} = -2 + \ln 3.$$

Câu 75. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

A. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1.$

B. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1.$

C. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e.$

D.

$$\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**Hàm số $y = x - \ln x$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Do $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$; $y(e) = e - 1$; $y(1) = 1$ nên $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.

Câu 76. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = x^2 - 4\ln x$ trên đoạn $[1; e]$ là:

A. $e^2 - 4$ và 1

B. $e^2 - 4$ và $2 - 2\ln 2$

C. $e^2 + 4$ và -1

D. $e^2 + 4$ và $2 - 2\ln 2$

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án C.**

Xét hàm số trên $[1; 4]$; $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$

$$\forall x \in [1; 4] \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$f(1) = 10; f(3) = 6; f(4) = \frac{25}{4}$$

Vậy: $\max_{[1; 4]} f(x) = 10$ tại $x = 1$, $\min_{[1; 4]} f(x) = 6$ tại $x = 3$.

Câu 77. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ là:

A. $2e^4$ và $-e^2$

B. $2e^4$ và $-\frac{1}{e^2}$

C. $4e^4$ và $-e^2$

D. $4e^4$ và $-\frac{1}{e^2}$

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$, $f'(x) = 2(x^2 + x - 2)e^{2x}$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (-1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x \in (-1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = -e^2, f(-1) = \frac{-1}{e^2}, f(2) = 2e^4.$$

Câu 78. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ là $M = \frac{m}{e^n}$, trong đó m, n làcác số tự nhiên. Tính $S = m^2 + 2n^3$.

A. $S = 135..$

B. $S = 24..$

C. $S = 22..$

D. $S = 32..$

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án C.**

$$y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}.$$

$$y(1) = 0, y(e^2) = \frac{4}{e^2}, y(e^3) = \frac{9}{e^3}. \text{ Suy ra } M = \frac{4}{e^2} \Rightarrow m = 4, n = 2 \Rightarrow S = 4^2 + 2 \cdot 2^3 = 32.$$

Câu 79. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} \geq m.$$

A. $(-\infty; 3]$.

B. $(-\infty; 3\sqrt{2}]$.

C. $(3\sqrt{2}; +\infty)$.

D. $(-\infty; 3\sqrt{2})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Đặt $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-x}, x \in [-5; 4]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-5	$-\frac{1}{2}$	4
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	3	$3\sqrt{2}$	3

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq 3\sqrt{2}$.

Câu 80. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x + \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm

A. $-2 < m < 2$.

B. $-2 < m < 2\sqrt{2}$.

C. $-2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Tập xác định $D = [-2; 2]$

Phương trình $x + \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số

$$y = x + \sqrt{4-x^2} \quad (C)$$

Xét hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ trên $D = [-2; 2]$

Ta có $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'		+	0	-
y		$2\sqrt{2}$	2	

Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (C) khi $-2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

Câu 81. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M + m$ bằng

A. 44.

B. 41.

C. 43.

D. 42.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$\text{Ta có : } (x+y)^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{y+1})^2 \leq (1+2) \cdot ((x-1) + (y+1)) = 3 \cdot (x+y)$$

$$\text{Do đó : } 0 \leq (x+y) \leq 3.$$

$$\text{Theo bài ra : } P = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)}$$

$$\text{Đặt } t = x+y. \text{ Đk : } 0 \leq t \leq 3.$$

$$\text{Xét : } P = f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t} \text{ trên } [0;3].$$

$$\text{Có } f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}}.$$

$$\text{Đặt } g(t) = f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}} \Rightarrow g'(t) = f''(t) = 2 + \frac{2}{\sqrt{(4-t)^3}} > 0 \text{ với } \forall t \in [0;3].$$

$$\text{Do đó : hàm số } g(t) \text{ đồng biến trên } [0;3].$$

$$\text{Khi đó : } g(t) > g(0) \Rightarrow f'(t) \geq f'(0) = 0. \text{ Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } [0;3].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = f(3) = 25 \\ m = f(0) = 18 \end{cases}. \text{ Vì vậy : } M + m = 43.$$

DẠNG 2: GTLN, GTNN TRÊN MỘT KHOẢNG, NỬA KHOẢNG**Phương pháp:** Xét khoảng hoặc nửa khoảng D

- Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm trên D.
- Lập BBT cho hàm số trên D.
- Dựa vào BBT và định nghĩa từ đó suy ra GTLN, GTNN.

Câu 1. Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ **A.** Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = 3$.**B.** Có giá trị lớn nhất là $\max y = -1$.**C.** Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = -1$.**D.** Có giá trị lớn nhất là $\max y = 3$.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án D.**Xét hàm số đã cho trên $D = (0, +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0, +\infty) \\ x = -1 \notin (0, +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'		0	-
y		3	

$1 \xrightarrow{\quad} 3 \xrightarrow{\quad} -\infty$

Do đó, $\max y = 3$ và không tồn tại $\min y$.**Câu 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.**A.** 4.**B.** 2.**C.** -2.**D.** -4.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án A.****Cách 1:**Vì hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ nên ta có $x > 0$ và $\frac{4}{x} > 0$.Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số x và $\frac{4}{x}$ ta có $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$.Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4, dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.**Cách 2:**TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{4}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

x	0	2	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số là 4.

Câu 3. Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét trên tập xác định của hàm số. Hãy chọn khẳng định đúng?

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	1	0

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
 C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $x = 0$ nhưng hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất tại 0 vì không tồn tại giá trị nào của x thỏa mãn.

Câu 4. Hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	4	0

Xét trên tập xác định của hàm số. Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
 C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ trên khoảng $(-\infty; 2)$.

A. $\max y = 4$
 $(-\infty; 2)$

B. $\max y = 3$
 $(-\infty; 2)$

C. $\max y = 1$
 $(-\infty; 2)$

D. $\max y = 2$
 $(-\infty; 2)$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (-\infty; 2) \\ x = 3 \notin (-\infty; 2) \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	
y'		+	0	-
y	$-\infty$		2	$-\infty$

Nên $\max_{(-\infty; 2)} y = 2$.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$.

A. $\min y = 5$.
 $[-4; -2)$

B. $\min y = 6$.
 $[-4; -2)$

C. $\min y = 4$.
 $[-4; -2)$

D. $\min y = 7$.
 $[-4; -2)$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Xét hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$

$$y' = -1 + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [-4; -2) \\ x = -3 \in [-4; -2) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = 2\sqrt{3-x}$.

A. $y_{\min} = 0$.

B. $y_{\min} = -6$.

C. $y_{\min} = -3$.

D. $y_{\min} = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Tập xác định: $D = (-\infty; 3]$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{\sqrt{3-x}} < 0, \forall x \in (-\infty; 3)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

x	$-\infty$	3
y'		-
y	$+\infty$	0

Vậy $\min_{(-\infty; 3]} y = y(3) = 0$.

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. -1.

B. 6.

C. $\frac{23}{27}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Ta có $y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1$.

Đặt $t = \sin x \in (-1; 1)$ thì hàm số trở thành $y = t^3 + 2t^2 + t + 1, t \in (-1; 1)$.

Ta có $y' = 3t^2 + 4t + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = -\frac{1}{3}(n) \end{cases} \Rightarrow \text{Min} y = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}.$$

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 3.

B. 7.

C. 1.

D. -1.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = 3\cos x - 12\sin^2 x \cos x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\cos x - 12\sin^2 x \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Ta có $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$ nên GTLN của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng 1.

Câu 10. Tìm m để phương trình $x^5 + x^3 - \sqrt{1-x} + m = 0$ có nghiệm trên $(-\infty; 1]$.

A. $m > 2$.B. $m \leq -2$.C. $m \geq -2$.D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$x^5 + x^3 - \sqrt{1-x} + m = 0 \Leftrightarrow x^5 + x^3 - \sqrt{1-x} = -m.$$

Xét hàm số $y = x^5 + x^3 - \sqrt{1-x}$ trên $(-\infty; 1]$.

$$y' = 5x^4 + 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0, \forall x \in (-\infty; 1].$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1
y'		
		2
y'	$-\infty$	

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow -m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{9}{x} + x$. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; 0)$

A. 3.

B. -6.

C. -9

D. -3.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Vì $x \in (-\infty; 0)$ nên ta lấy $x = -3$, loại $x = 3$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	0
y'		$+$	$-$
y	$-\infty$	-6	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-\infty; 0)$ là -6 .

Câu 12. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm

A. $(0; 1)$.

B. $(-\infty; 0]$.

C. $(1; +\infty]$.

D. $(0; 1]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

ĐK: $x \geq 0$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[4]{(x^2+1)^3}}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3} \cdot \sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = \sqrt[4]{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow 3x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \text{ (VN)}$$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$, $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Vậy $m \in (0; 1]$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x} = m + \tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

D. $-1 < m < 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$pt \Leftrightarrow m = \frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x} - 1}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow m = \frac{t}{\sqrt{2+t^2} - 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{\sqrt{2+t^2} - 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{2 - \sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2} \cdot (\sqrt{2+t^2} - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

Lập BBT với $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -1, f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}, f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Câu 14. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$$

A. $\min P = 5$.

B. $\min P = \frac{7}{3}$.

C. $\min P = \frac{17}{3}$.

D. $\min P = \frac{115}{3}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án B.**Ta có $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$

$$P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1 \Rightarrow P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2 - x)^2 - x + 1 \Rightarrow P = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$$

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ trên $[0; +\infty)$

$$y' = x^2 + 4x - 5. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$\frac{115}{3}$				
	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	$+\infty$		

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min P = \frac{7}{3}$.**Câu 15.** Giá trị của m để phương trình $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$ có nghiệm là:

A. $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**

Đặt $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$

Vậy, $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

DẠNG 3: ỨNG DỤNG GTLN, GTNN VÀO GIẢI TOÁN THỰC TẾ

Câu 1: Hình chữ nhật có chu vi không đổi là 8 m. Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật đó là:

A. $4m^2$.B. $8m^2$.C. $16m^2$.D. $2m^2$.

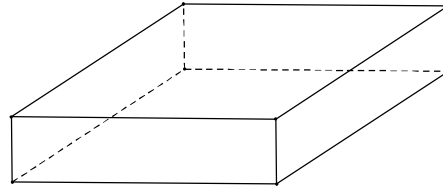
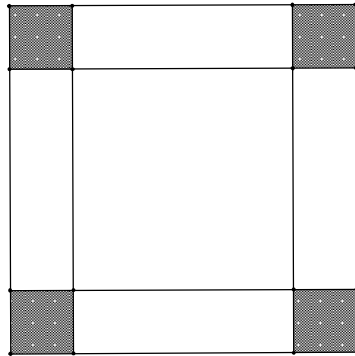
Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Gọi 2 kích thước của hình chữ nhật là $a, b \Rightarrow a + b = 4$.

$$S = a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4. \text{ Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng } 4m^2.$$

Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 2$.B. $x = 4$.C. $x = 6$.D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

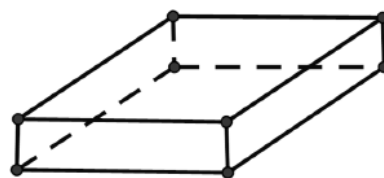
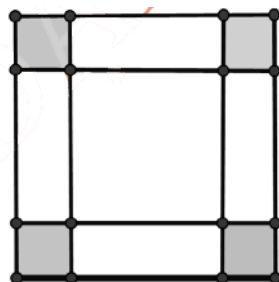
Khối hộp có đáy là hình vuông với độ dài cạnh là $18 - 2x$ và độ dài chiều cao là x nên có thể tích

$$\text{là } V = x(18 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (18 - 2x) \cdot (18 - 2x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x + 18 - 2x + 18 - 2x}{3} \right)^3 = 432.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 18 - 2x \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy $\max V = 432 \Leftrightarrow x = 6$.

Câu 3: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông cạnh bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 6$.B. $x = 4$.C. $x = 2$.D. $x = 8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

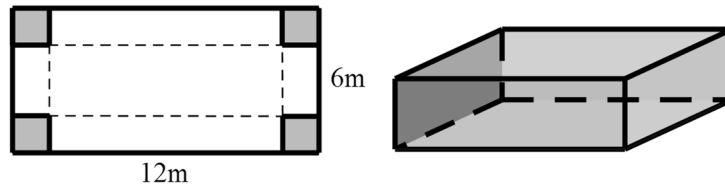
Cạnh đáy của hộp là $24 - 2x$.

Khi đó thể tích của hộp: $V = (24 - 2x)^2 x = f(x)$

$$\text{Có } 4V = (24 - 2x)(24 - 2x)4x \leq \left(\frac{24 - 2x + 24 - 2x + 4x}{3} \right)^3 = 16^3$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $24 - 2x = 4x \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 4: Cho hình vẽ.



Bạn An có một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài 12(m), chiều rộng 6(m). Bạn nhờ bác thợ hàn cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau và gấp tấm nhôm lại (như hình trên) để được một cái hộp không nắp dùng để đựng nước. Hỏi bác thợ hàn phải cắt cạnh hình vuông bằng bao nhiêu sao cho khối hộp chứa được nhiều nước nhất?

A. $24\sqrt{3}$ (m).

B. $3 - \sqrt{3}$ (m).

C. $3 + \sqrt{3}$ (m).

D. $24 - \sqrt{3}$ (m).

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi x là độ dài cạnh hình vuông bị cắt, khi đó ta có $0 < x < 6$.

Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(12 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 36x^2 + 72x$.

Ta cần tìm x sao cho $V(x)$ lớn nhất với $0 < x < 6$.

$$\text{Ta có } V'(x) = 12x^2 - 72x + 72, \quad V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 72x + 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \\ x = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

x	0	$3-\sqrt{3}$	$3+\sqrt{3}$	6		
$V'(x)$		+	0	-	0	+
$V(x)$	0	41,57	-41,57	0		

Dựa vào bảng biến thiên ta có $V(x)$ lớn nhất khi $x = 3 - \sqrt{3}$.

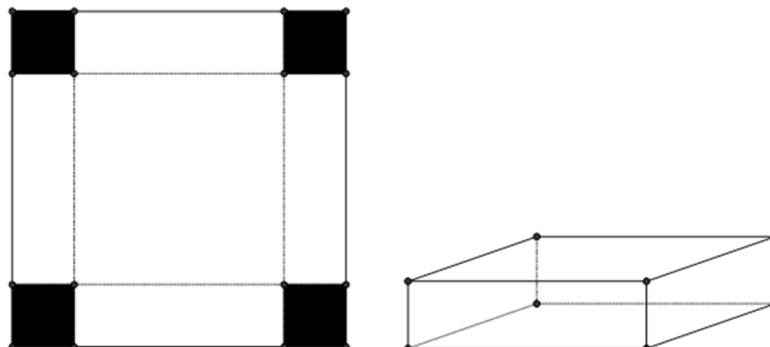
Câu 5: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 6$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = 4$.



Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án B.**

Theo đề bài ta có $V = h.S = x.(18 - 2x)^2 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$.

Xét $f(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ liên tục trên $(0; 9)$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 144x + 324$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	3	9
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	432	0

Vậy thể tích lớn nhất khi $x = 3$.

Câu 6: Một trang chữ của một quyển sách tham khảo Văn học cần diện tích 384 cm^2 . Biết rằng trang giấy được canh lề trái là 2 cm , lề phải là 2 cm , lề trên 3 cm và lề dưới là 3 cm . Tìm chiều dài và chiều rộng của trang sách để trang sách có diện tích nhỏ nhất

A. Chiều dài: 32 cm và chiều rộng: 12 cm .

B. Chiều dài: 24 cm và chiều rộng: 16 cm .

C. Chiều dài: 40 cm và chiều rộng: 20 cm .

D. Chiều dài: 30 cm và chiều rộng: 20 cm .

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án B.**

Gọi x, y là chiều dài và chiều rộng của trang chữ.

Theo đề bài ta có: $xy = 384$. Ta cần tìm x, y sao cho $(x + 4)(y + 6)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

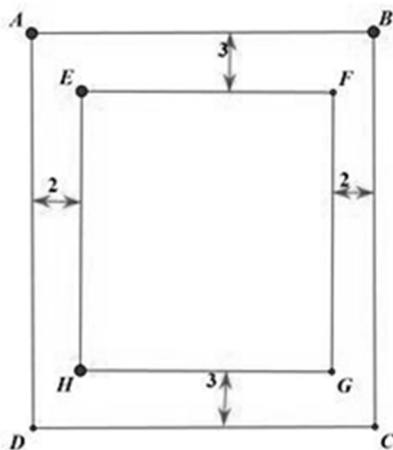
Ta có hàm $f(x) = xy + 6x + 4y + 24 = 408 + 6x + 4 \cdot \frac{384}{x}$

$$= 6x + \frac{1536}{x} + 408 \geq 2\sqrt{6 \cdot 1536} + 408 = 192$$

Dấu “=” xảy ra khi $6x = \frac{1536}{x} \Leftrightarrow x = 16$ và $y = 24$

Trên không, vài con cò vò tó trẻ đập nhanh đôi cánh trắng phau rồi khuấy trong lùm cây rậm lá. Những đám mây trắng đã ngả màu ngà, bầu trời xanh cũng đã ngả sang màu sẫm đưa đến màu đen. Đầu đó có tiếng chim lè bạn, tiếng dơi muỗi lao xáo lẩn trong tiếng gió nhẹ lay cành.

Dưới bên sông, con nước ròng lên đầy mé đã đứng lại không lùa được những đợt lục bình lơ lững giữa dòng ra sông cái. Dòng nước xanh chìm đi trong màu xám sẫm và những bóng cây bên bờ kia ngả xuống dòng càng lúc càng hiện rõ lù lù thành hàng trong bóng nước.



Câu 7: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong tháng 8 vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Hỏi tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

A. 12.

B. 15.

C. 20.

D. 30.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Ta có : $f'(t) = 90t - 3t^2$. Cần tính giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = f'(t)$

Khi đó : $g'(t) = f''(t) = 90 - 6t$. $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Câu 8: [2D1-3] Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một bồn nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều rộng là $x(m)$, chiều dài gấp 2 lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là $h(m)$, có thể tích là $\frac{4}{3}m^3$. Tìm chiều rộng của đáy hình chữ nhật để chi phí xây dựng là thấp nhất

A. $x = 1,5(m)$.B. $x = 2(m)$.C. $x = 1(m)$.D. $x = 2,5(m)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Ta có $V = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2x^2h = \frac{4}{3} \Leftrightarrow h = \frac{2}{3x^2}$

Diện tích xung quang của bồn nước (không nắp). $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6xh + 2x^2 = \frac{4}{x} + 2x^2$

$S' = -\frac{4}{x^2} + 4x$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

BBT

x	0	1	$+\infty$
y'		0	
	-		+
y	$+\infty$	6	$+\infty$

Để chi phí xây dựng là thấp nhất thì S phải nhỏ nhất. Ta có $\min S = 6$ khi $x = 1$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất là

A. $t = 5s$.

B. $t = 6s$.

C. $t = 3s$.

D. $t = 1s$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

$$\text{Ta có } v(t) = S'(t) = -6t^2 + 36t + 2 = -6(t-3)^2 + 56 \leq 56, \forall t.$$

Suy ra $v(t)$ lớn nhất bằng $56m/s$ khi $t = 3s$.

Câu 10: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x) = 0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất

A. 20 mg.

B. 0,5 mg.

C. 2,8 mg.

D. 15 mg.

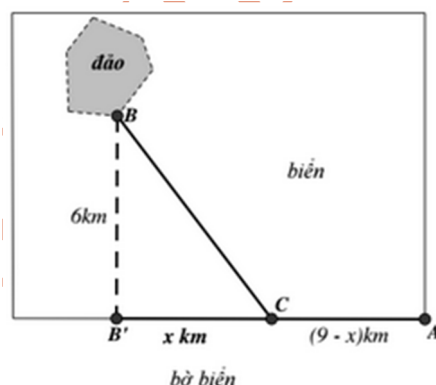
Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$G(x) = 0,024x^2(30-x) \Rightarrow G'(x) = 0,024(60x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(L) \\ x = 20 \end{cases}$$

Lập BBT $\Rightarrow x = 20mg$ là giá trị cần tìm.

Câu 11: Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50000USD mỗi km, và 130000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu ?



A. 6,5 km

B. 6 km

C. 0 km

D. 9 km

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Theo hình vẽ, số tiền để xây dựng đường ống từ A đến B là:

$$f(x) = 50000 \cdot (9-x) + 130000\sqrt{36+x^2}, \quad (0 < x < 9).$$

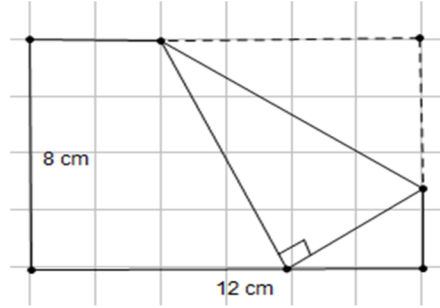
$$f'(x) = -50000 + 130000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+36}}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 50000\sqrt{36+x^2} = 130000x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$f(0) = 1230000, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = 1170000, \quad f(9) = 1170000\sqrt{17}.$$

$$\Rightarrow \min_{[0;9]} f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right).$$

Vậy C cách A 6,5 km.

Câu 12: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 cm và chiều rộng 8 cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho góc ở đỉnh của nó chạm với đáy như hình vẽ. Khi độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó là bao nhiêu.



A. $6\sqrt{15} + 6\sqrt{3}$.

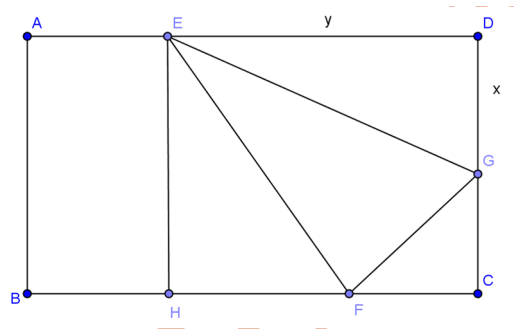
B. $6\sqrt{15} - 6\sqrt{3}$.

C. $8\sqrt{2}$.

D. $6\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.



Đặt $DG = FG = x$, $ED = HC = EF = y$. Khi đó $FC = \sqrt{x^2 - (8 - x)^2} = \sqrt{16x - 64}$,

$$HF = y - \sqrt{16x - 64}.$$

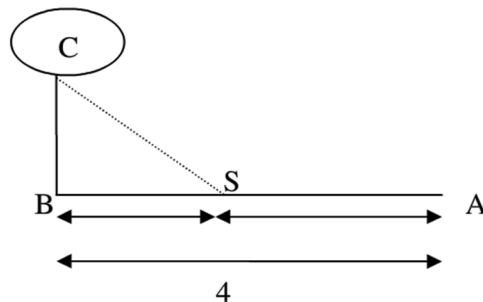
Ta có:

$$EF = \sqrt{8^2 + (y - \sqrt{16x - 64})^2} = y \Leftrightarrow 64 + y^2 - 2y\sqrt{16x - 64} + 16x - 64 = y^2 \Leftrightarrow y = \frac{8\sqrt{16x - 64}}{x}$$

Độ dài nếp gấp là $f(x) = x + y = x + \frac{8\sqrt{16x - 64}}{x}$ với $0 < x < 8$.

Thay lần lượt các đáp án ta thấy với $x = 6\sqrt{3}$ thì $f(x)$ nhỏ nhất.

Câu 13: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất?



A. $\frac{15}{4}$ km.

B. $\frac{13}{4}$ km.

C. $\frac{10}{4}$ km.

D. $\frac{19}{4}$ km.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án B.**

Gọi x là khoảng cách từ A đến S ($0 \leq x \leq 4$), ta có $BS = 4 - x$, $CS = \sqrt{(4-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$.

Chi phí cho đường dây điện là $y = 3000x + 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$.

Muốn ít tốn kém chi phí nhất ta cần tìm x để $y_{\min}$.

Xét hàm số $y = 3000x + 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ với $x \in [0, 4]$.

$$\text{Ta có } y' = 3000 + \frac{5000(2x-8)}{2\sqrt{x^2-8x+17}} = \frac{1000(3\sqrt{x^2-8x+17} + 5x-20)}{\sqrt{x^2-8x+17}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-8x+17} = 20-5x$$

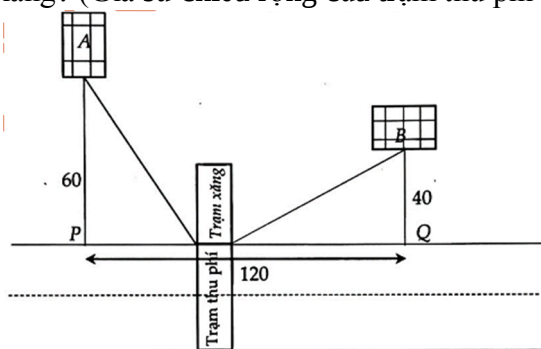
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 9x^2 - 72x + 153 = 400 - 200x + 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 16x^2 - 128x + 247 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = \frac{19}{4} \text{ (loại)} \\ x = \frac{13}{4} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Mà } y(0) = 5000\sqrt{17}, y(4) = 17000, y\left(\frac{13}{4}\right) = 16000.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0,4]} y = 16000 \text{ khi } x = \frac{13}{4} \text{ km.}$$

Lập bảng xét dấu ta có $x = 2\sqrt{2}$ thì khối chóp đạt giá trị lớn nhất.

Câu 14: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B, hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố này quyết định toán xem xây trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là 60km và 40km và khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? (Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể).



A. 72km kể từ P

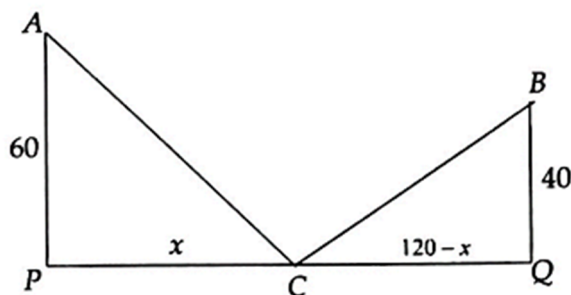
B. 42km kể từ Q

C. 48km kể từ P

D. tại P

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**

Vẽ lại hình vẽ thì ta có hình vẽ đơn giản hóa như sau:



Thực chất bài toán trở thành tìm x để $AC+BC$ nhỏ nhất.

Theo định lý Pytago ta có $AC = \sqrt{60^2 + x^2}$;

$$BC = \sqrt{(120 - x)^2 + 40^2} = \sqrt{x^2 - 240x + 16000}$$

Khi đó $f(x) = AC + BC = \sqrt{x^2 + 3600} + \sqrt{x^2 - 240x + 16000}$. Ta cần tìm $\min_{(0;120)} f(x)$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3600}} + \frac{x-120}{\sqrt{x^2 - 240x + 16000}}$; khi bấm máy tính nhẩm bằng cách nhập vào màn

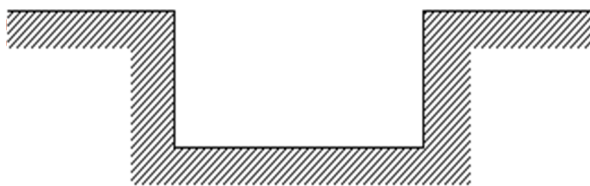
hình biểu thức $f'(x)$ và ấn **SHIFT** **SOLVE** và chọn một số nằm trong khoảng $(0;120)$ để dò nghiệm, như tôi nhập 2 máy nhanh chóng hiện nghiệm là 72.

Bấm máy tính sử dụng nút TABLE ta nhận thấy phương trình có duy nhất một nghiệm này do $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua 72. Khi đó ta có BBT sau:

x	0	72	120
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy từ đó ta có thể kết luận $CP=72$.

Câu 15: Người ta cần xây dựng mương nước có dạng như hình vẽ, với diện tích tiết diện ngang của mương là $8m^2$. Gọi l là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này. Để l đạt giá trị nhỏ nhất thì các kích thước của mương là



A. 4m và 1m.

B. 2m và 1m.

C. 4m và 2m.

D. 3m và 2m.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của mương.

Theo bài ra ta có $8 = x.y$, $l = 2y + x = \frac{16}{x} + x$.

Xét hàm số $l(x) = \frac{16}{x} + x$

$$l'(x) = \frac{-16}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 16}{x^2}$$

$$\text{Cho } l'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(n) \\ x = -4(l) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

Ta được l đạt giá trị nhỏ nhất thì các kích thước của mương là $x = 4m, y = 2m$

Câu 16: Một người thợ xây cần xây một bể chứa $108m^3$ nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều dài cạnh đáy và chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất? Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày của thành bể và đáy là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau

A. $\sqrt[3]{108}m; \sqrt[3]{108}m$.

B. $6m; 3m$.

C. $3m; 12m$.

D. $2m; 27m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi x, h tương ứng là độ dài cạnh đáy và đường cao của hình hộp chữ nhật.

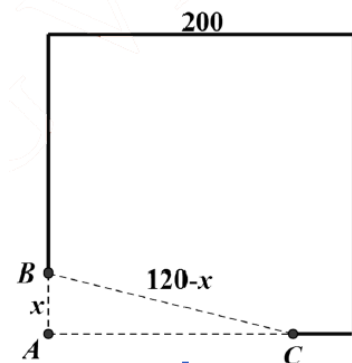
$$\text{Ta có: } V = h.x^2 = 108 \Rightarrow h = \frac{108}{x^2}.$$

$$S = 4S_{sq} + S_d = 4xh + x^2 = \frac{432}{x} + x^2 = \frac{216}{x} + \frac{216}{x} + x^2.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được } S \geq 3\sqrt[3]{216^2}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{216}{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow h = \frac{108}{6^2} = 3.$$

Câu 17: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh $200cm$. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB = x$ ($0 < x < 60cm$) là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $120cm$. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



A. $x = 40cm$.

B. $x = 50cm$.

C. $x = 30cm$.

D. $x = 20cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$\text{Ta có độ dài cạnh } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(120-x)^2 - x^2} = \sqrt{14400 - 240x}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} x\sqrt{14400 - 240x}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x\sqrt{14400 - 240x} \text{ với } 0 < x < 60.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \sqrt{14400 - 240x} - \frac{120x}{\sqrt{14400 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{\sqrt{14400 - 240x}};$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40 \in (0; 60).$$

Bảng biến thiên:

x	0	40	60	
$f'(x)$		+	0	$-\infty$
$f(x)$				

Vậy $S_{\max} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \Leftrightarrow x = 40$.

Câu 18: Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Gọi x là chiều dài cạnh đáy ($0 < x < 5\sqrt{2}$), ta có

$$MI = \frac{5 - x\sqrt{2}}{2}, AM^2 = \frac{25}{4} + \frac{25 - 10\sqrt{2}x + x^2}{4} = \frac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2}$$

$$\text{Đường cao hình chóp là } h = \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2} - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}}$$

$$\text{Thể tích của khối chóp là } V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}} \Rightarrow V^2 = \frac{1}{18}(25x^4 - 5\sqrt{2}x^5)$$

Xét hàm số $y = 25x^4 - 5\sqrt{2}x^5$ trên khoảng $(0; 5\sqrt{2})$

$$y = 25.4x^3 - 25\sqrt{2}x^4 = 25x^3(4 - \sqrt{2}x)$$

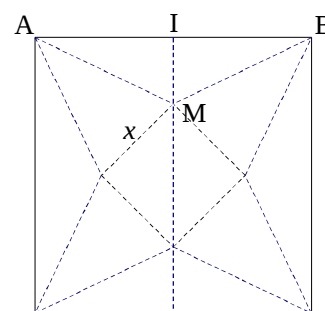
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

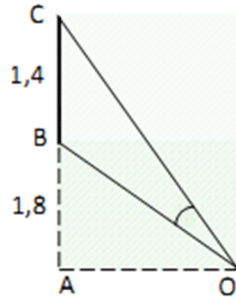
x	0	$2\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
y'	+	0	-
y		320	

Suy ra $\max_{(0; 5\sqrt{2})} y = 320$ tại $x = 2\sqrt{2}$. Suy ra

$$V_{\max} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

Câu 19: Một màn ảnh chữ nhật cao 1,4 mét được đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng O sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí điểm O ($\widehat{BOC}$ gọi là **góc nhìn**).



A. $AO = 2,4m$.B. $AO = 2m$.C. $AO = 2,6m$.D. $AO = 3m$.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án A.**

Đặt $OA = x$. Ta có: $\tan \widehat{AOC} = \frac{3,2}{x}$, $\tan \widehat{AOB} = \frac{1,8}{x}$.

$$\tan \widehat{BOC} = \tan(\widehat{AOC} - \widehat{AOB}) = \frac{\tan \widehat{AOC} - \tan \widehat{AOB}}{1 + \tan \widehat{AOC} \cdot \tan \widehat{AOB}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$

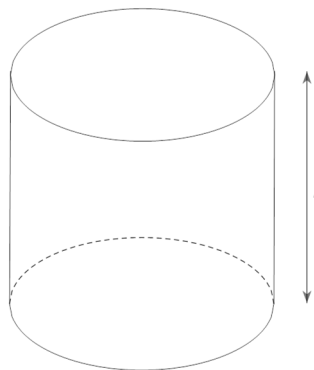
$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 8,064}{(x^2 + 5,76)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5,76 \Leftrightarrow x = 2,4.$$

x	0	2,4	$+\infty$
y'	0	+	0
y	0	$\frac{7}{24}$	0

Dựa vào BBT trên: $\max_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{7}{24}$ khi $x = 2,4m$.

Câu 20: Muốn làm một bồn chứa 1000 lít **hình trụ** có nắp đáy, để ít tốn vật liệu nhất thì chiều cao h (dm) của bồn phải gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 10,84.

B. 10,83.

C. 10,85.

D. 10,86.

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**

Để ít tốn vật liệu nhất thì diện tích toàn phần bồn nước phải nhỏ nhất.

Tức là: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ nhỏ nhất. (với R là bán kính đường tròn đáy.

$$\text{Thể tích bồn nước } V = \pi R^2 h = 1000 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1000}{\pi h}}$$

$$S_p = 2\pi \cdot \frac{1000}{\pi h} + 2\pi \sqrt{\frac{1000}{\pi h}} \cdot h = \frac{2000}{h} + \sqrt{4000\pi h}.$$

$$S'_p = -\frac{2000}{h^2} + \frac{2000\pi}{\sqrt{4000\pi h}}, S'_p = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4000\pi h} = \pi h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} \approx 10,84.$$

Sử dụng bảng biến thiên, ta tìm được S_p nhỏ nhất khi $h \approx 10,84$.

Câu 21: Khi nuôi cá trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng: $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

A. $n = 8$.B. $n = 12$.C. $n = 20$.D. $n = 24$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Cân nặng của n con cá là: $f(n) = n \cdot P(n) = 480n - 20n^2$

Ta có: $f(n) = 480n - 20n^2 = 2880 - 20(12 - n)^2 \leq 2880$

Vậy nhiều cá nhất khi $n = 12$

Câu 22: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

A. 115 250 000.

B. 101 250 000.

C. 100 000 000.

D. 100 250 000.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi n là số lần tăng giá (n là số tự nhiên). Khi đó số căn hộ bị bỏ trống cũng là n . Do đó số tiền thu được khi cho thuê $50 - n$ căn hộ là $A = (2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4 \cdot n)(50 - n) = -5 \cdot 10^4 n^2 + 5 \cdot 10^5 n + 10^8$, điều kiện $n < 50$.

Xét hàm số $f(x) = -5 \cdot 10^4 x^2 + 5 \cdot 10^5 x + 10^8$, với $0 \leq x < 50$.

Ta có $f'(x) = -10^5 x + 5 \cdot 10^5$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Lập bảng biến thiên, suy ra $\max_{[0;50]} f(x) = f(5) = 101\,250\,000$.

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là 101 250 000.

Câu 23: Doanh nghiệp Alibaba cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Alibaba cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày)

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$ (1)

Và $0 < y \leq 6 \Rightarrow 4 \leq x < 10$.

Số tiền lãi $f(x) = x^3 + 2x + 326y - 27y^2 = x^3 + 2x + 326(10 - x) - 27(10 - x)^2$ (thay (1) vào).

$\Leftrightarrow f(x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$ với $x \in [4; 10)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 54x + 216$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 54x + 216 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 12$.

Chỉ có $x = 6 \in [4; 10)$. Vậy máy A làm việc trong 6 ngày.

Câu 24: Một người thợ xây cần xây một bể chứa 108 m^3 nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất. Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày thành bể và đáy bể là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau.

A. 9 m

B. 3 m.

C. 2 m.

D. 6 m.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi độ dài cạnh đáy bằng $x \text{ (m)}$, chiều cao bằng $h \text{ (m)}$ ($x > 0; h > 0$).

Khi đó $h \cdot x^2 = 108 \Rightarrow h = \frac{108}{x^2}$.

Tổng diện tích xung quanh và diện tích phần đáy bể là $S = 4 \cdot x \cdot h + x^2 = 4 \cdot \frac{108}{x} + x^2$

Để số gạch dùng xây bể là ít nhất thì S nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{432}{x} + x^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = -\frac{432}{x^2} + 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Lập bảng biến thiên và suy ra S nhỏ nhất khi $x = 6$. Khi đó $h = 3$.

Câu 25: Ông An dự định làm một cái bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích là $k \text{ m}^3$ ($k > 0$). Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi ông An cần chọn bán kính đáy của bể là bao nhiêu để chi phí làm bể là ít nhất? (Biết bể dày vỏ inox không đáng kể)

A. $\sqrt[3]{\frac{k}{\pi}}$.B. $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{k}}$.C. $\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$.D. $\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Gọi r, h ($r > 0, h > 0$) lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

+ Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = k \Rightarrow h = \frac{k}{\pi r^2}$.

+ Diện tích đáy và nắp là $S_d = S_n = \pi r^2$; diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi rh$.

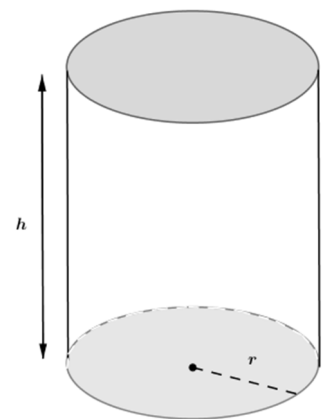
+ Khi đó chi phí làm bể là

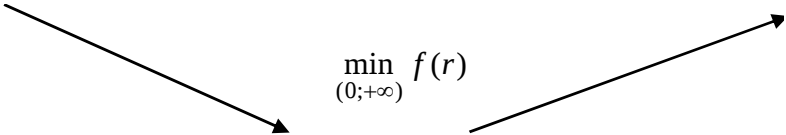
$$C = (600 + 200)\pi r^2 + 400 \cdot 2\pi rh = 800\pi r^2 + 800\pi r \frac{k}{\pi r^2} = 800\left(\pi r^2 + \frac{k}{r}\right)$$

+ Đặt $f(r) = \pi r^2 + \frac{k}{r}$, $r > 0 \Rightarrow f'(r) = 2\pi r - \frac{k}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - k}{r^2}$;

$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$, ($k > 0$).

+ Bảng biến thiên:



r	0 $\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$ $+\infty$				
$f'(r)$			$-\quad\quad\quad 0\quad\quad\quad +$		
		$+\infty$			$+\infty$
$f(r)$			$\min_{(0;+\infty)} f(r)$ 		

Vậy: Chi phí làm bể ít nhất $\Leftrightarrow f(r)$ đạt giá trị

$$\text{nhỏ nhất} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}.$$

Câu 26: Doanh nghiệp Alibaba cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Alibaba cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày)

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$\text{Ta có } x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (1)$$

$$\text{Và } 0 < y \leq 6 \Rightarrow 4 \leq x < 10.$$

$$\text{Số tiền lãi } f(x) = x^3 + 2x + 326y - 27y^2 = x^3 + 2x + 326(10 - x) - 27(10 - x)^2 \text{ (thay (1) vào).}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560 \text{ với } x \in [4; 10).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 54x + 216. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 54x + 216 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 12.$$

Chỉ có $x = 6 \in [4; 10)$. Vậy máy A làm việc trong 6 ngày.

Câu 27: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 400(km). Vận tốc dòng nước là 10(km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 12 (km/h).

B. 15 (km/h).

C. 18 (km/h).

D. 20 (km/h).

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

$$\text{Ta có vận tốc cá bơi ngược dòng là } v - 10 \text{ (km/h), thời gian cá bơi hết } 400 \text{ (km) là } t = \frac{400}{v - 10}.$$

$$\text{Năng lượng tiêu hao của cá trong } t = \frac{400}{v - 10} \text{ (giờ) được cho bởi công thức } E(v) = cv^3 \cdot \frac{400}{v - 10} \text{ với } v > 10.$$

$$\text{Ta có } E'(v) = 800c \cdot v^2 \cdot \frac{v - 15}{(v - 10)^2}, \quad E'(v) = 0 \Leftrightarrow 800c \cdot v^2 (v - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 15 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên.

v	10	15	$+\infty$
$E'(v)$	-	0	+
$E(v)$	$+\infty$	$E(15)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên vận tốc của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao ít nhất là 15 km/h.

Câu 28: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40cm, cưa xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.

A. $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (cm)$. B. $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (cm)$.

C. $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (cm)$. D. $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (cm)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và dài của miếng phụ.

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$.

Cạnh hình vuông $MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} (cm)$.

$\Rightarrow S = (20\sqrt{2})^2 + 4xy = 800 + 4xy (1)$.

Ta có $2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2}$.

$\Rightarrow 0 < x < 20 - 10\sqrt{2}$.

Lại có $AB^2 + AD^2 = BD^2 = 40^2 \Rightarrow (2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 1600$.

$\Rightarrow y^2 = 800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2}$.

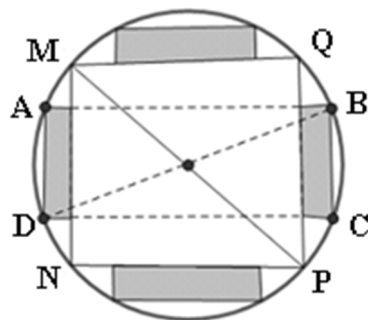
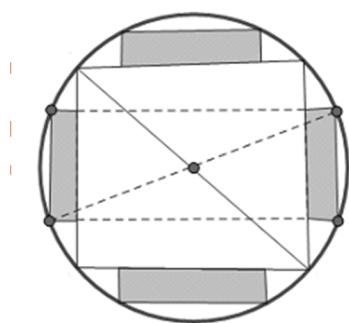
Thế vào (1) $\Rightarrow S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4}$.

Xét hàm số $f(x) = 800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4$, với $x \in (0; 20 - 10\sqrt{2})$ có.

$f'(x) = 1600x - 240x^2\sqrt{2} - 16x^3 = 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2)$.

Ta có $\begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ chính là giá trị thỏa mãn bài toán.



Câu 29: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (phút), hàm số đó là $s = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t = 4s$.B. $t = 2s$.C. $t = 6s$.D. $t = 8s$.**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án B.**Ta có: $s = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = 12t - 3t^2$.

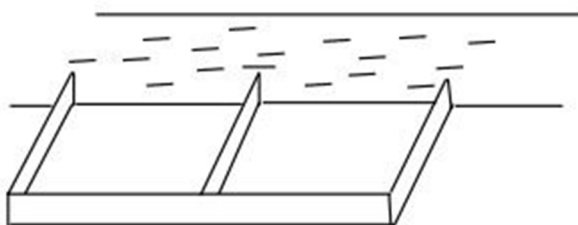
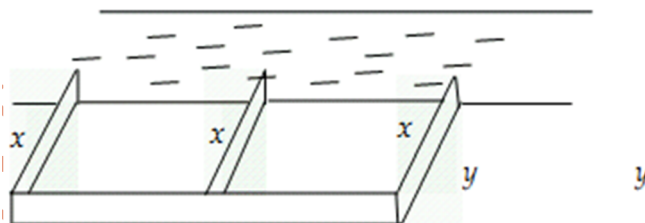
$$v'(t) = 12 - 6t \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Bảng biến thiên của $v(t)$ là:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$		0	-
$v(t)$		12	

Vậy: Thời điểm 2 (giây) thì vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Câu 30: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng là một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.

A. $6250 m^2$ B. $1250 m^2$ C. $3125 m^2$.D. $50 m^2$ **Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án A.****Phân tích** ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ

Từ đề bài ban đầu ta có được mối quan hệ sau:

Do bác nông dân trả 15 000 000 đồng để chi trả cho nguyên vật liệu và đã biết giá thành từng mặt nên ta có mối quan hệ:

$$3x \cdot 50000 + 2y \cdot 60000 = 15000000$$

$$\Leftrightarrow 15x + 12y = 1500 \Leftrightarrow y = \frac{150 - 15x}{12} = \frac{500 - 5x}{4}$$

Diện tích của khu vườn sau khi đã rào được tính bằng công thức:

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot y = 2x \cdot \frac{500 - 5x}{4} = \frac{1}{2}(-5x^2 + 500x)$$

Đến đây ta có hai cách để tìm giá trị lớn nhất của diện tích:

Cách 1: Xét hàm số trên một khoảng, vẽ BBT và kết luận GTLN:

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1}{2}(-5x^2 + 500x) \text{ trên } (0; 100)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-10x + 500), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

Ta có BBT

x	0	50	100
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		6250	

Cách 2: Nhẩm nhanh như sau: Ta biết rằng $A - g^2(x) \leq A$ với mọi x , nên ta có thể nhẩm nhanh được:

$$f(x) = \frac{5}{2}(-x^2 + 100x) = \frac{5}{2}(-x^2 + 2 \cdot 50 \cdot x - 2500 + 2500) = \frac{5}{2} \cdot [2500 - (x - 50)^2] \leq 6250$$

Hoặc bấm máy tính phần giải phương trình bậc hai và ấn bằng nhiều lần máy sẽ hiện như sau:

Câu 31: Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường Đại học Bách Khoa Hà Nội. Kỳ I của năm nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50 m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền $1m^2$ đất khi bán là 1500000 VN đồng.

A. 112687500 VN đồng.

B. 114187500 VN đồng.

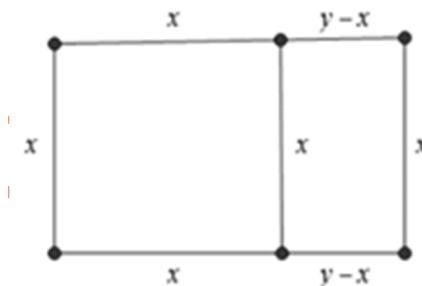
C. 115687500 VN đồng.

D. 117187500 VN đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Diện tích đất bán ra càng lớn thì số tiền bán được càng cao



Gọi chiều rộng và chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu lần lượt là $x, y(m), (x, y > 0)$

Chu vi mảnh đất hình chữ nhật ban đầu bằng $50m \Rightarrow 2(x + y) = 50 \Leftrightarrow y = 25 - x$

Bài ra, ta có ngay mảnh đất được bán là một hình chữ nhật có diện tích là

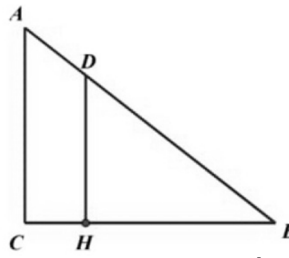
$$S = x(y - x) = x(25 - x - x) = 25x - 2x^2 = -\left(x\sqrt{2} - \frac{25}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{625}{8} \leq \frac{625}{8} = 78,125$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x\sqrt{2} - \frac{25}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{8} \Rightarrow y = 25 - \frac{25}{8} = \frac{175}{8}$$

Như vậy, diện tích đất nước được bán ra lớn nhất $78,125 m^2$.

Khi đó số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất là $78,125 \cdot 1500000 = 117187500$

Câu 32: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường CH=0,5m là:



A. Xấp xỉ 5,602

B. Xấp xỉ 6,5902

C. Xấp xỉ 5,4902

D. Xấp xỉ 5,5902

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án D.**Đặt $BH = x (x > 0)$. Ta có

$$BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{x^2 + 16}$$

Vì $DH \parallel AC$ nên

$$\frac{DA}{DB} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow DA = \frac{DB \cdot HC}{HB} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$$

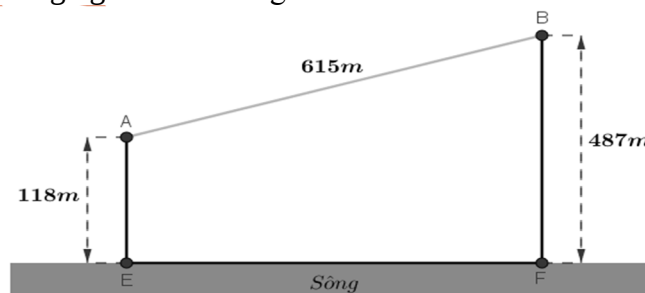
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \cdot 2x - 2\sqrt{x^2 + 16}}{4x^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} - \frac{8}{x^2 \sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x^3 - 8}{x^2 \sqrt{x^2 + 16}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2; f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2; f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$\text{Suy ra } \min_{x \in (0; +\infty)} AB = f(x) = f(2) = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5,5902(m)$$

Câu 33: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



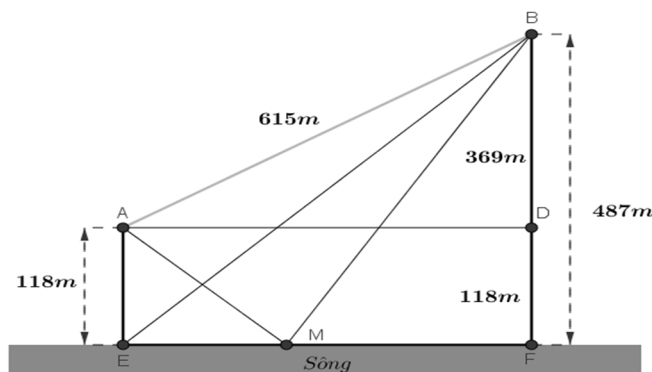
A. 596,5m

B. 671,4m

C. 779,8m

D. 741,2m

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án C.**



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B. để dàng tính được $BD = 369$, $EF = 492$. Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta có

giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 779,8m.

Câu 34: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

A. 2.225.000.

B. 2.100.000

C. 2.200.000

D. 2.250.000

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Gọi x (đồng/tháng) là số tiền tăng thêm của giá cho thuê mỗi căn hộ. ($x \geq 0$)

Khi đó số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{2x}{100\,000}$ (căn hộ).

Khi đó, số tiền công ti thu được là:

$$T(x) = \left(2\,000\,000 + x\right) \left(50 - \frac{2x}{100\,000}\right) = 100\,000\,000 + 10x - \frac{2x^2}{100\,000} \text{ (đồng/tháng)}.$$

Khảo sát hàm số $T(x)$ trên $[0; +\infty)$.

$$T'(x) = 10 - \frac{4x}{100\,000}.$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 1000\,000 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 250\,000.$$

Bảng biến thiên

x	0	250 000	$+\infty$
T'	+	0	-
T			

$$\text{Do đó } \max_{x \geq 0} T(x) = T(250\,000) = 2.250.000.$$

Câu 35: Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất?

A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.

B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.

C. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

D. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần ($x \in [1; 2500]$, đơn vị cái)

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$

Số lần đặt hàng mỗi năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là: $\frac{2500}{x}(20 + 9x)$

Khi đó chi phí mà cửa hàng phải trả là: $C(x) = \frac{2500}{x}(20 + 9x) + 5x = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$

Lập bảng biến thiên ta được: $C_{\min} = C(100) = 23500$

Kết luận: đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái tivi.

Câu 36: Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

A. 40cm.

B. $40\sqrt{3}$ cm.

C. 80cm.

D. $40\sqrt{2}$ cm.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x, 0 < x < 60$

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{120^2 - 240x}$. Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0; 60)$

$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

Lập bảng biến thiên:

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	40	60	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$			$S(40)$	

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$

Câu 37: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10cm , biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A. 80cm^2

B. 100cm^2

C. 160cm^2

D. 200cm^2

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $x(\text{cm})$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn $(0 < x < 10)$.

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là: $2\sqrt{10^2 - x^2}$ (cm).

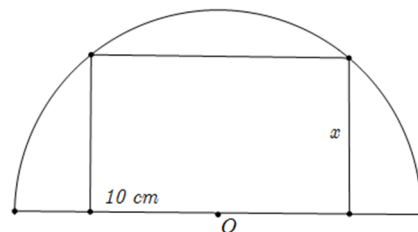
Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$

$$\text{Ta có } S' = 2\sqrt{10^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}} = \frac{2 \cdot 10^2 - 4x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{thoả}) \\ x = -\frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{không thỏa}) \end{cases}$$

$$S'' = -8x \Rightarrow S''\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right) = -40\sqrt{2} < 0. \text{ Suy ra } x = \frac{10\sqrt{2}}{2} \text{ là điểm cực đại của hàm } S(x).$$

$$\text{Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là: } S = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{10^2 - \frac{10^2}{2}} = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$$



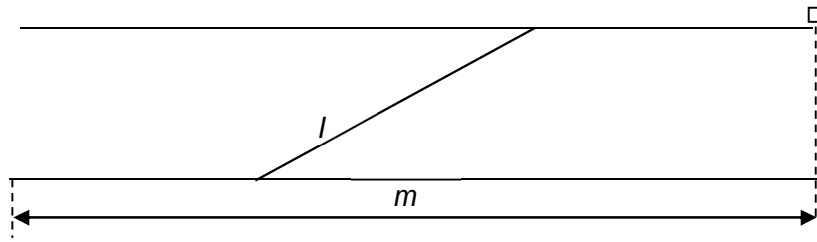
Câu 38: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay.

A. $\frac{400}{3}$

B. $\frac{40}{33}$

C. $\frac{100}{3}$

D. $\frac{200}{3}$



Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Vấn đề là chọn thời gian bơi và thời gian đi bộ sao cho “tối ưu”. Giả sử độ dài đoạn bơi là l và tốc độ bơi của chiến sĩ là v . Ký hiệu m là độ dài đoạn sông kể từ người chiến sĩ đến đồn địch, khi ấy

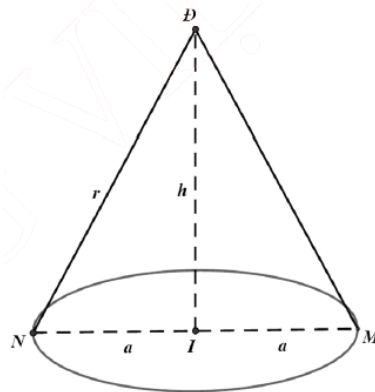
$$\text{tổng thời gian bơi và chạy bộ của người chiến sĩ là } t = \frac{l}{v} + \frac{m - \sqrt{l^2 - 100^2}}{2v}.$$

$$\text{Do } m, v \text{ là cố định nên thời gian đạt cực tiểu khi hàm số } f(l) = \frac{l}{v} - \frac{\sqrt{l^2 - 100^2}}{2v} = \frac{2l - \sqrt{l^2 - 100^2}}{2v}$$

đạt cực tiểu, và cũng tức là khi hàm $g(l) = 2l - \sqrt{l^2 - 100^2}$ đạt cực tiểu. Điều này xảy ra khi

$$2 - \frac{l}{\sqrt{l^2 - 100^2}} = 0, \text{ hay } l = 2\sqrt{l^2 - 100^2}, \text{ tức là } l = 400/3 = 133,333333 \text{ (met).}$$

Câu 39: Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a . Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).



A. $h = \frac{3a}{2}$

B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $h = \frac{a}{2}$

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $r = \sqrt{a^2 + h^2}$ (Định lý Py- ta- go)

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \Rightarrow C = k \cdot \frac{\sin \alpha}{R^2} = k \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2} (a^2 + h^2)}$$

$$\text{Xét hàm } f(h) = \frac{h}{(\sqrt{a^2 + h^2})^3} (h > 0), \text{ ta có:}$$

$$f'(h) = \frac{\sqrt{(a^2 + h^2)^3} - 2h^2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + h^2}}{(a^2 + h^2)^3}$$

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(h^2 + a^2)^3} = 3h^2 \cdot \sqrt{a^2 + h^2} \Leftrightarrow h^2 + a^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Bảng biến thiên:

h	0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'(h)		+	-
f(h)			

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(h)_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = k.f(h)_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 40: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

A. 1m

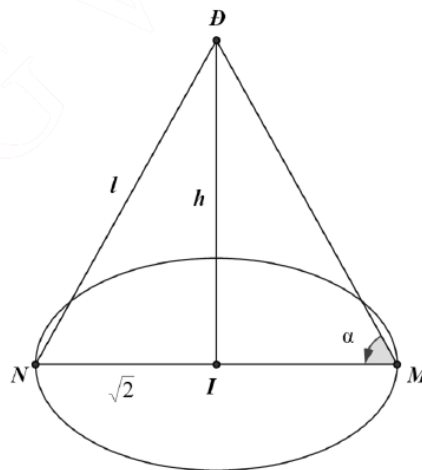
B. 1,2m

C. 1.5 m

D. 2m

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.



Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn ($h > 0$); D là bóng điện; I là hình chiếu của D lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn. (như hình vẽ)

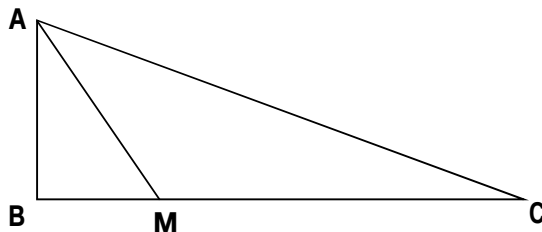
Ta có $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c \frac{\sqrt{l^2 - 2}}{l^3}$ ($l > \sqrt{2}$).

$$C'(l) = c \cdot \frac{6 - l^2}{l^4 \cdot \sqrt{l^2 - 2}} > 0 \quad (\forall l > \sqrt{2})$$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6} \quad (l > \sqrt{2})$$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó $h = 2$

Câu 41: Nhà của 3 bạn A, B, C nằm ở 3 vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B (như hình vẽ), $AB = 10$ km; $BC = 25$ km và 3 bạn tổ chức họp mặt ở nhà bạn C. Bạn B hẹn chờ bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC. Từ nhà, bạn A đi xe buýt đến điểm hẹn M với tốc độ 30km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C bằng xe máy với tốc độ 50km/h. Hỏi điểm hẹn M cách nhà bạn B bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?



A. 5 km

B. 7,5 km

C. 10 km

D. 12,5 km

Hướng dẫn giải:

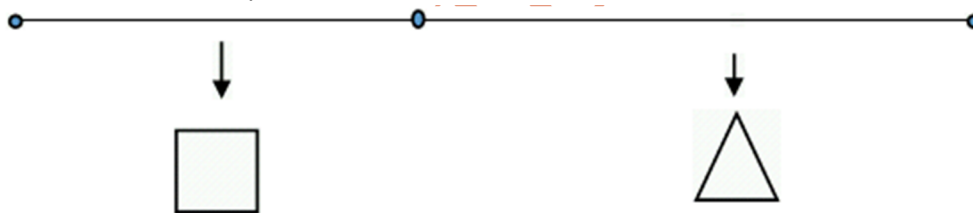
Chọn đáp án B.

Đặt $BM = x$ (km), $x \geq 0$

Thời gian để bạn A di chuyển từ A đến M rồi đến nhà C là: $t(x) = \frac{\sqrt{100+x^2}}{30} + \frac{25-x}{50}$ (h)

Lập bảng biến thiên, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $\frac{23}{30}$ khi $x = \frac{15}{2}$

Câu 42: Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?

A. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m)B. $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m)C. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m)D. $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m)

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m) khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}((9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36)$$

Diện tích nhỏ nhất khi

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy diện tích Min khi } x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$$

Hoặc đến đây ta có thể bấm máy tính giải phương trình $(9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36$ ấn bằng và hiện giá trị.



$$\text{X-Value Minimum} = \frac{54 - 24\sqrt{3}}{11}$$

Câu 43: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn.

B. 50 ngàn.

C. 450 ngàn.

D. 80 ngàn.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x : $\frac{(x - 400) + 2}{20} = \frac{x - 400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \frac{x - 400}{10} = 90 - \frac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10} \right) = -\frac{x^2}{10} + 90x$.

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$

Bảng biến thiên:

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	20250 ↗ ↘		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 44: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam).

Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 10

B. 12

C. 16

D. 24

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ $n > 0$. Khi đó:

Cân nặng của một con cá là: $P(n) = 480 - 20n$ (gam)

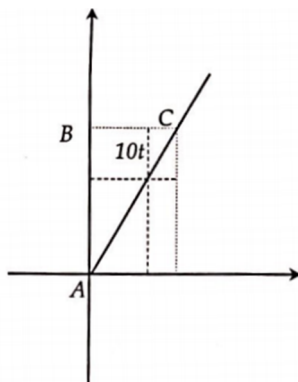
Cân nặng của n con cá là: $n.P(n) = 480n - 20n^2$ (gam)

Xét hàm số: $f(n) = 480n - 20n^2, n(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(n) = 480 - 40n$, cho $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Lập bảng biến thiên ta thấy số cá phải thả trên một đơn vị diện tích hồ để có thu hoạch nhiều nhất là 12 con.

Câu 45: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau tại cùng một thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo đường thẳng từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(0;100)$ với vận tốc $5m/s$. Con còn lại bay trên quỹ đạo đường thẳng từ $C(60;80)$ về A với vận tốc $10m/s$. Hỏi trong quá trình bay, thì khoảng cách ngắn nhất mà hai con đạt được là bao nhiêu?

A. $20(m)$ B. $50(m)$ C. $20\sqrt{10}(m)$ D. $20\sqrt{5}(m)$ **Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án D.**Xét ở thời điểm t Tọa độ của con chuồn chuồn bay từ B về A là $(0;100 - 5t)$.

Do con chuồn chuồn bay từ C về A trên đường thẳng AC có hệ số góc $k = \tan \alpha = \frac{4}{3}$ nên tọa độ của con chuồn chuồn này là:

$$\begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha = 60 - 10t \cdot \frac{3}{5} = 60 - 6t \\ y = 80 - 10 \sin \alpha = 80 - 8t \end{cases}$$

Như vậy ở thời điểm t khoảng cách giữa 2 con chuồn chuồn sẽ là: $d = \sqrt{(60 - 6t)^2 + (20 + 3t)^2}$

Khoảng cách giữa 2 con chuồn chuồn nhỏ nhất khi và chỉ khi $(60 - 6t)^2 + (20 + 3t)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $t \in [0;10]$

Xét $f(t) = (60 - 6t)^2 + (20 + 3t)^2$ trên $[0;10]$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 90t - 600 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow \min f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000$$

$\Rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất giữa 2 con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}(m)$

Nhận xét: Đây là một bài toán cần khả năng tư duy thật nhanh khi làm bài thi trắc nghiệm. Và bài toán này cũng cần khả năng tính toán rất cẩn thận vì số liệu khá lớn. Ở bước xử lý đạo hàm của hàm số $f(t)$ nếu tính toán sai rất có thể các bạn sẽ chọn min ở 2 đầu của đoạn $[0;10]$ nên sẽ chọn đáp án B hoặc C.