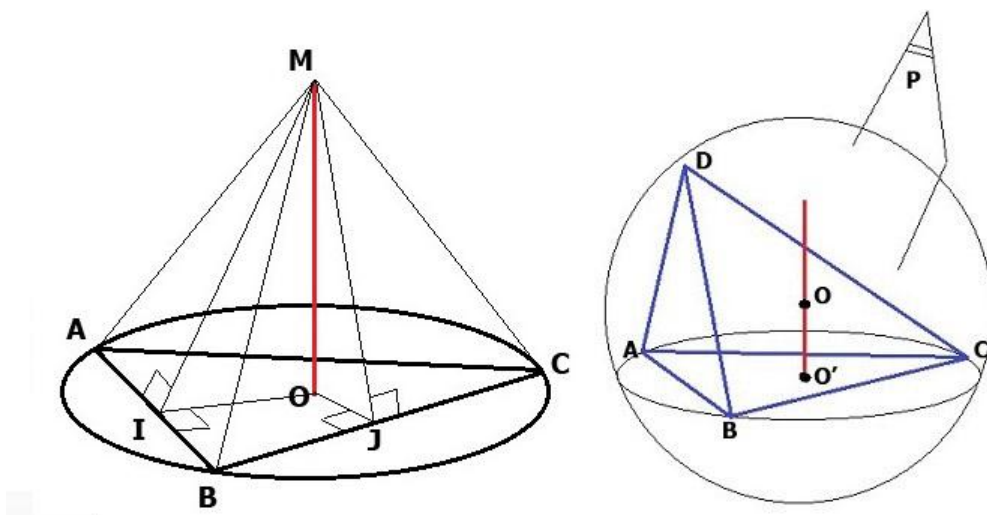


# PP GIẢI NHANH BÀI TOÁN MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP



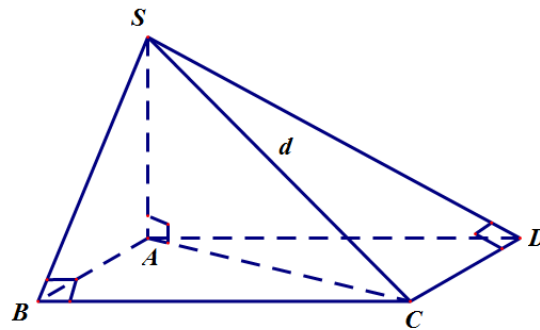
HOÀNG TRỌNG TẤN

0909520755, TÂN PHÚ, TPHCM

## PP tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp các loại

**Loại 1 : Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.**

Gọi  $d$  là độ dài đoạn thẳng trên thì ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp là:  $R = \frac{d}{2}$



**Ví dụ :** Cho hình chóp SABC có tam giác ABC vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và  $SC=2a$  . Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên

**Giải :**

Dễ thấy tam giác SAC vuông tại A , tam giác SBC vuông tại B từ đó hình chóp này loại 1 nên

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

**Ví dụ :** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông , SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và  $SC=2a$  . Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên

**Giải :**

Dễ thấy tam giác SAC vuông tại A , tam giác SBC vuông tại B và góc SDC vuông tại D từ đó hình chóp này loại 1 nên :

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

**Loại 2 : Hình chóp đều**

Gọi  $h$  là độ cao hình chóp và  $k$  là chiều dài cạnh bên thì ta có bán kính mặt cầu là :

$$R = \frac{k^2}{2h}$$

**Ví dụ :** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  , có  $AB=a$  và cạnh bên  $SA=2a$  , tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên

**Giải :** gọi  $G$  là trọng tâm tam giác thì ta có  $SG$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$

Thế thì  $SA = k, SG = h$  nên  $R$  mặt cầu :

$$R = \frac{SA^2}{2SG}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AG^2}}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} AB\right)^2}} = \frac{2\sqrt{33}}{11} a$$

**Ví dụ:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  , có  $AB=a$  và cạnh bên  $SA=2a$  , tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên

**Giải :** gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$  thì ta có  $SO$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$

Thế thì  $SA = k, SO = h$  nên  $R$  mặt cầu :

$$R = \frac{SA^2}{2SO}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AO^2}}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{14}}{7} a$$

**Loại 3 :** Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Gọi  $h$  là chiều cao hình chóp và  $R_d$  là bán kính của đáy thì bán kính mặt cầu :

$$R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

**Ví dụ :** cho hình chóp SABCD có cạnh SA vuông góc với đáy , ABCD là hình chữ nhật có đường chéo dài  $a\sqrt{5}$  , SA=2a . Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp SABCD

**Giải :** Ta có :  $R_{\text{đáy}} = \frac{AC}{2}$  và SA=h. Áp dụng công thức ta có :

$$R = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow R = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

**Ví dụ :** cho hình chóp SABC có cạnh SA vuông góc với đáy , ABC là tam giác đều cạnh = a , SA dài 2a . Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp SABCD

**Giải :** Ta có  $R_{\text{đáy}} = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$  và SA=h

Áp dụng công thức ta có :

$$R = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}AB\right)^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

**Ví dụ :** cho hình chóp SABC có cạnh SA vuông góc với đáy , ABC là tam giác vuông tại A và BC=2a , SA dài 2a . Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp SABCD

**Giải :** Ta có  $R_{\text{đáy}} = \frac{BC}{2}$  và SA=h. Áp dụng công thức ta có :

$$R = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} \Leftrightarrow R = a\sqrt{2}$$

**Ví dụ :** cho hình chóp SABC có cạnh SA vuông góc với đáy , ABC là tam giác cân tại A và AB=a và góc A =120 độ , SA dài 2a . Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp SABC

**Giải :** Ta có :  $R_{\text{đáy}} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S_{ABC}} = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot a}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a$  và  $SA=2a$

Áp dụng công thức ta có :  $R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

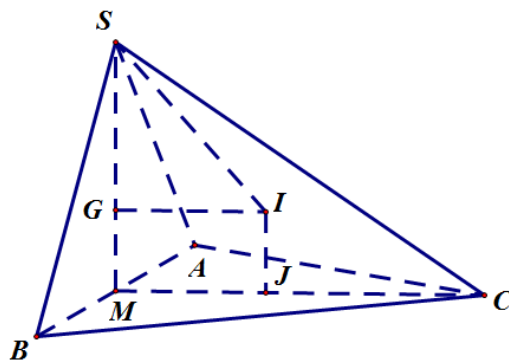
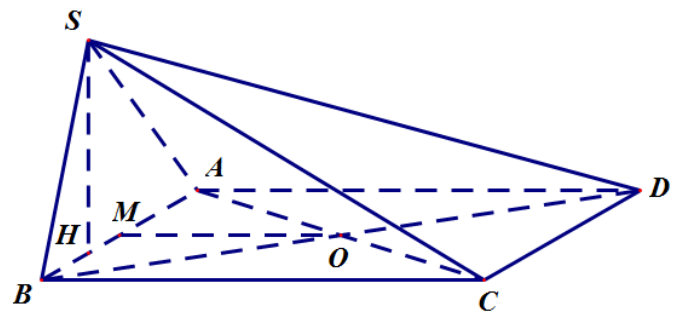
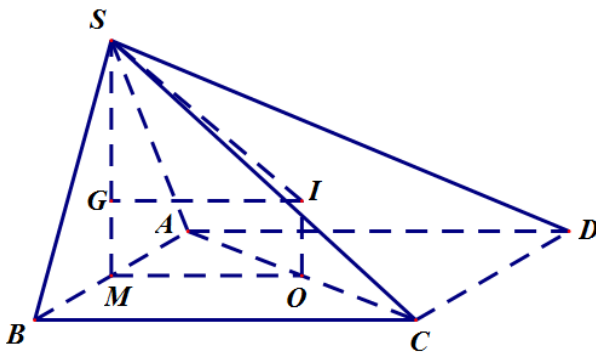
Diện tích :  $S = 4\pi(a\sqrt{2})^2 = 8\pi a^2$  , thể tích  $V = \frac{4}{3}\pi(a\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

**Loại 4: Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy**

Đối với loại này thì mặt bên vuông góc thường là tam giác vuông , tam giác cân hoặc đều

Gọi  $h$  là chiều cao hình chóp và  $R_b, R_d$  là bán kính của mặt bên , mặt đáy ,  $GT$  là độ dài giao tuyến của mặt bên và đáy thì bán kính mặt cầu :

$$R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{GT^2}{4}}$$



**Ví dụ :** cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  , tam giác  $SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy . Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

**Giải :** Giao tuyến của mặt bên và đáy là :  $GT = AB$ , bán kính đáy  $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , bán kính mặt bên (SAB) là  $R_b = SG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , Áp dụng công thức ta có :

$$R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{GT^2}{4}}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

**Ví dụ :** cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB cân tại S và có cạnh SA=2a, Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

**Giải :** Giao tuyến của mặt bên và đáy là :  $GT = AB$ , bán kính đáy  $R_d = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , bán kính mặt bên (SAB) là  $R_b = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4S_{\Delta SAB}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}a$ , Áp dụng công thức ta có :

$$R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{GT^2}{4}}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{115}}{10}$$

Các loại mặt cầu khác thì ta nên sử dụng hệ trục cho dễ xử lý hơn là làm thuần túy

## Bài Tập vận dụng

**Câu 1:** Hình cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều tam giác có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a là

- A.  $\frac{4\pi\sqrt{3}a^3}{27}$       B.  $\frac{32\pi\sqrt{3}a^3}{9}$       C.  $\frac{32\pi\sqrt{2}a^3}{27}$       D.  $\frac{32\pi\sqrt{3}a^3}{27}$

**Câu 2:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B,  $AB = a$ ;  $BC = a\sqrt{3}$ ;  $SA = a\sqrt{5}$  và  $SA \perp (ABC)$ . Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

- A.  $\frac{27\pi a^3}{2}$       B.  $\frac{3\pi a^3}{2}$       C.  $\frac{9\pi a^3}{2}$       D.  $36\pi a^3$

**Câu 3:** Thể tích của hình cầu nội tiếp hình lập phương cạnh bằng a là

A.  $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$       B.  $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{3}$       C.  $\frac{\pi a^3}{3}$       D.  $\frac{\pi a^3}{6}$

**Câu 4:** Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng  $a$  là

A.  $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$       B.  $\frac{4\pi a^3}{3}$       C.  $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{3}$       D.  $\frac{\pi a^3}{6}$

**Câu 5:** Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình tứ diện đều có cạnh bằng  $a$  là

A.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$       B.  $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$       C.  $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

**Câu 6:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $A'BC$ . Thể tích của hình cầu ngoại tiếp tứ diện  $GABC$  là

A.  $\frac{49\pi a^3}{108}$       B.  $\frac{343\pi a^3}{432}$       C.  $\frac{343\pi a^3}{5184}$       D.  $\frac{343\pi a^3}{1296}$

**Câu 7:** Thể tích của hình cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh bằng  $a$  là

A.  $4\pi\sqrt{3}a^3$       B.  $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$       C.  $\frac{4\pi a^3}{3}$       D.  $\pi a^3$

**Câu 8.** Mặt cầu nội tiếp hình lập phương cạnh  $a$  (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương) có thể tích bằng:

A.  $\frac{\pi a^3}{6}$       B.  $\frac{4\pi a^3}{3}$       C.  $\frac{8\pi a^3}{3}$       D.  $2\pi a^3$

**Câu 9.** Cho hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Thể tích khối cầu ngoại tiếp ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho là:

A.  $\frac{7\pi a^2}{3}$       B.  $\frac{7\pi a^3}{3}$       C.  $\frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54}$       D.  $\frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{96}$

**Câu 10.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , tam giác  $SBC$  vuông tại  $S$ ,  $AB=SC=a$ ,  $AC=SB = a\sqrt{3}$ . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là:

A.  $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{4\pi a^3}{3}$       C.  $\frac{4\pi a^3\sqrt{2}}{3}$       D.  $2\pi a^3$

**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đều có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A.  $\frac{4\pi a^2}{3}$       B.  $4\pi a^2\sqrt{2}$       C.  $\pi a^2$       D.  $2\pi a^2$

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AC = a\sqrt{2}$ ,  $SA \perp (ABC)$ ,  $SC$  tạo với đáy một góc  $45^\circ$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A.  $a\sqrt{2}$     B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$     C.  $a$     D.  $2a\sqrt{2}$

**Câu 13.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = AC$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A.  $2a$     B.  $a\sqrt{2}$     C.  $a$     D.  $2a\sqrt{2}$

**Câu 14.** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng  $a\sqrt{3}$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ ABC.A'B'C' bằng:

A.  $\frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$     B.  $\frac{4\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$     C.  $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$     D.  $\frac{4\pi a^3}{3}$

**Câu 15:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AB = BC = a\sqrt{3}$ ,  $SAB = SCB = 90^\circ$  và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC theo a.

A.  $2\pi a^2$     B.  $8\pi a^2$     C.  $16\pi a^2$     D.  $12\pi a^2$

**Câu 16:** Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A.  $\frac{a\sqrt{21}}{6}$     B.  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$     C.  $\frac{a\sqrt{30}}{6}$     D.  $\frac{a\sqrt{30}}{3}$

**Câu 17:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật,  $SA \perp ABCD$ . Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là:

- A. Trung điểm cạnh SD.    B. Trung điểm cạnh SC.  
C. Giao điểm của hai đường chéo AC và BD.    D. Trọng tâm tam giác SAC.

**Câu 18:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B,  $AB = 1cm$ ,  $BC = \sqrt{3}cm$ ,  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = 4cm$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC bằng:

A.  $2\sqrt{5}cm$     B.  $\sqrt{5}cm$     C.  $\sqrt{2}cm$     D.  $\frac{\sqrt{19}}{2}cm$

**Câu 19:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là:





**Câu 26:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên bằng  $a$ . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  là:

**A.**  $2\pi a^2$

**B.**  $4\pi a^2$

**C.**  $\pi a^2$

**D.**  $6\pi a^2$

**Câu 27:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  bằng:

**A.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$

**B.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$

**C.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$

**D.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$