SỐ PHỨC

BÀI 1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Mỗi biểu thức dạng $a+bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$ được gọi là một **số phức**.
Đối với số phức $z=a+bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z, i gọi là đơn vị ảo.
Tập số phức $\mathbb{C}=\{a+bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2=-1\}$. Tập số thực $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

VÍ DỤ 1. Số phức $z=3-2i$ có phần thực là ...... phần ảo là ......

Lời giải.
Số phức $z=3-2i$ có phần thực là 3 phần ảo là -2. □

Đặc biệt

— Khi phần ảo $b=0 \Leftrightarrow z=a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ là số thực.

— Khi phần thực $a=0 \Leftrightarrow z=bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.

— Số $0=0+0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

2. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}, \quad \text{với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

VÍ DỤ 2. Tìm các số thực x, y biết rằng $(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i$.

Lời giải.
Từ định nghĩa ta có $\begin{cases} 2x+1=x+2 \\ 3y-2=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3. \end{cases}$ □

3. Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(a;b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$.

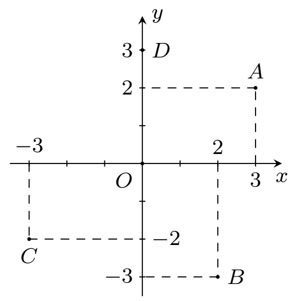
VÍ DỤ 3.
Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có

① Điểm A biểu diễn cho số phức ....

② Điểm B biểu diễn cho số phức ....

③ Điểm C biểu diễn cho số phức ....

④ Điểm D biểu diễn cho số phức ....



Lời giải.
Ta có

① Điểm A biểu diễn cho số phức $z = 3 + 2i$.

② Điểm B biểu diễn cho số phức $z = 2 - 3i$.

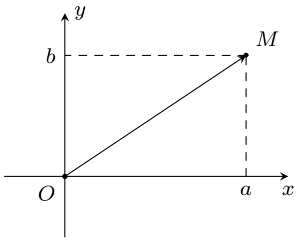
③ Điểm C biểu diễn cho số phức $z = -3 - 2i$.

④ Điểm D biểu diễn cho số phức $z = 3i$.

□

4. Mô-đun của số phức

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.



① Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và được ký hiệu là $|z|$. Khi đó, $|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

② Kết quả, với mọi số phức z ta có

(a) $|z| \geq 0$ và $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(c) $|z| = |\bar{z}|$.

(d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(e) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

VÍ DỤ 4. Tìm mô-đun của các số phức sau

① $z = 3 - 2i \Rightarrow |z| = |3 - 2i| = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

② $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

Lời giải.
Ta có

① $|z| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

② $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

□

5. Số phức liên hợp

Định nghĩa 2. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và được ký hiệu là $\bar{z} = a - bi$.

VÍ DỤ 5.

① Cho $z = -3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = \ldots\ldots\ldots$

② Cho $\bar{z} = 4 + 3i \Rightarrow z = \ldots\ldots\ldots$

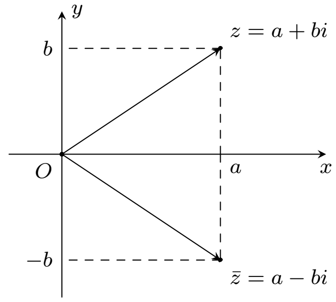
Lời giải.

① Cho $z = -3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = -3 + 2i$.

② Cho $\bar{z} = 4 + 3i \Rightarrow z = 4 - 3i$.

□

— Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox.



— Từ định nghĩa ta có các kết quả sau

2 $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$.

2 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

2 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

2 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

2 z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.

2 z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

6. Cộng, trừ, nhân, chia số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

① Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.

— **Phép cộng:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

— **Phép trừ:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

— Số phức đối của của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$. Do đó, $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

VÍ DỤ 6. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 3 + 7i$. Tìm phần thực, phần ảo và mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2$ và số phức $w' = z_2 - z_1$.

Lời giải.

Ta có $w = (5 + 2i) + (3 + 7i) = 8 + 9i$ và $w' = (3 + 7i) - (5 + 2i) = -2 + 5i$.
Như thế

- w có phần thực là 8, phần ảo là 9 và mô-đun là $|w| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145}$,
- w' có phần thực là -2, phần ảo là 5 và mô-đun là $|w'| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

□

② Phép nhân số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức, rồi thay $i^2 = -1$ trong kết quả nhận được. Cụ thể, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

③ **Phép chia:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$, $(z_2 \neq 0)$.

④ Số phức nghịch đảo của $z = a + bi \neq 0$ là $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

VÍ DỤ 7. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 4 + 3i$. Hãy tính

- $w = z_1 \cdot z_2 =$ ....
- $\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} =$ ....
- $r = \dfrac{z_1}{z_2} =$ ....

Lời giải.

Ta có

- $w = z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i)(4 + 3i) = 14 + 23i$.
- $\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = \overline{(5 + 2i)(4 - 3i)} = \overline{26 - 7i} = 26 + 7i$.
- $r = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5 + 2i}{4 + 3i} = \dfrac{(5 + 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \dfrac{26 - 7i}{25} = \dfrac{26}{25} - \dfrac{7}{25} \cdot i$.

□

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực

Phương pháp giải. Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}, \quad \text{với } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

— *Biểu diễn số phức cần tìm $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biến đổi thu gọn phương trình của bài toán về dạng $A+Bi=C+Di$.*

— *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} A=C \\ B=D. \end{cases}$

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm các số thực x và y thỏa các điều kiện sau

① $2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x$. **ĐS:** $x=1, y=1$

② $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i$. **ĐS:** $x=1, y=1$

Lời giải.

① Ta có $2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x \Leftrightarrow 2x+1+(1-2y)i=4-x+(y-2)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=4-x \\ 1-2y=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Vậy $x=1, y=1$.

② Ta có $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i \Leftrightarrow x+(-2x+1+2y)i=1+i \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -2x+1+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy $x=1, y=1$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện bên dưới. Từ đó xác định phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z.

① $(2+3i)\,z-(1+2i)\,\overline{z}=7-i$. **ĐS:** $z=2-i$

② $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z\cdot\overline{z}=25$. **ĐS:** $z=3+4i, z=5$

Lời giải.

① Gọi $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi, (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & (2+3i)\,(a+bi)-(1+2i)\,(a-bi)=7-i \\ \Leftrightarrow\ & 2a+2bi+3ai+3bi^2-a+bi-2ai+2bi^2=7-i \\ \Leftrightarrow\ & (a-5b)+(a+3b)\,i=7-i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-5b=7 \\ a+3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z=2-i \Rightarrow |z|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.
Vậy phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng -1, số phức liên hợp $\overline{z}=2+i$.
Nhận xét. *Khi bài toán yêu cầu tìm các thuộc tính của số phức (phần thực, phần ảo, mô-đun hoặc số phức liên hợp) mà đề bài cho giả thiết chứa hai thành phần trong ba thành phần $z,\overline{z},|z|$ thì ta sẽ gọi số phức $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi, |z|=\sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b\in\mathbb{R}$, rồi sau đó thu gọn và sử dụng kết quả hai số phức bằng nhau, giải hệ.*

② Gọi $z=a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có
$|a+bi-2-i|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-1)^2=10.$ (1)

Lại có $a^2+b^2=25 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-1)^2+4a+2b=30.$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được $b=10-2a$. Khi đó $a^2+(10-2a)^2=25 \Leftrightarrow 5a^2-40a+75=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=5. \end{array}\right.$

Với $a=3 \Rightarrow b=4$.
Với $a=5 \Rightarrow b=0$.
Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z=3+4i$ và $z=5$.

□

VÍ DỤ 3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

ĐS: $\left[\begin{array}{l} z=-i \\ z=-1+\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)i \\ z=-1-\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)i \end{array}\right.$

Lời giải.
Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có

$$\begin{aligned} &(z-1)^2=z^2-2z+1=(a+bi)^2-2(a+bi)+1 \\ \Rightarrow\ &(z-1)^2=a^2+2abi+b^2i^2-2a-2bi+1=\left(a^2-b^2-2a+1\right)+(2ab-2b)\,i. \end{aligned}$$

Vì $(z-1)^2$ là số thuần ảo nên phần thực của nó bằng 0, nghĩa là có $a^2-b^2-2a+1=0 \Leftrightarrow (a-2)^2-b^2=0.$ (1)
Ta có $|z+2-i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a+bi+2-i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |(a+2)+(b-1)\,i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a+2)^2+(b-1)^2=8.$ (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b^2=(a-1)^2 \\ (a+2)^2+(b-1)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=a-1 \\ (a+2)^2+(b-1)^2=8 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-a \\ (a+2)^2+(b-1)^2=8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=a-1 \\ 2a^2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-a \\ a^2+2a-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1+\sqrt{3} \\ b=2-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1-\sqrt{3} \\ b=2+\sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có ba số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z=-i, z=-1+\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)i, z=-1-\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.
Nhận xét. *Số phức $z=a+bi$ được gọi là số phức thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực $a=0$ và z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo $b=0$.*

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tìm các số thực x và y thỏa các điều kiện sau (nhóm sử dụng hai số phức bằng nhau).

① $3x+2iy-ix+5y=7+5i$. **ĐS:** $x=-1, y=2$

Lời giải.

Ta có $3x+2iy-ix+5y=7+5i \Leftrightarrow 3x+5y+(-x+2y)i=7+5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y=7 \\ -x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2. \end{cases}$

Vậy $x=-1, y=2$. □

② $\dfrac{x+yi}{1-i}=3+2i$. **ĐS:** $x=5, y=-1$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x+yi}{1-i}=3+2i \Leftrightarrow x+yi=(3+2i)(1-i) \Leftrightarrow x+yi=5-i \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1. \end{cases}$

Vậy $x=5, y=-1$. □

③ $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i$. **ĐS:** $x=-2, y=8$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i \Leftrightarrow (x-3)(3-i)+(y-3)(3+i)=(3+i)(3-i)i \Leftrightarrow 3x+3y-18+(-x+y)i=10i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-18=0 \\ -x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8. \end{cases}$$

Vậy $x=-2, y=8$. □

BÀI 2. Nhóm bài toán tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z.

① $2z-i\overline{z}=2+5i$. **ĐS:** $z=3+4i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi, (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & 2(a+bi)-i(a-bi)=2+5i \\ \Leftrightarrow\ & 2a+2bi-ia+bi^2=2+5i \\ \Leftrightarrow\ & (2a-b)+(2b-a)i=2+5i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2a-b=2 \\ -a+2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z=3+4i$.

Vậy số phức z có phần thực là 3, phần ảo bằng 4, số phức liên hợp là $\overline{z}=3-4i$, mô-đun bằng $|z|=5$. □

② $z+(2+i)\overline{z}=3+5i$. **ĐS:** $z=2-3i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi, (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & a+bi+(2+i)(a-bi)=3+5i \\ \Leftrightarrow\ & a+bi+2a-2bi+ai-bi^2=3+5i \\ \Leftrightarrow\ & (3a+b)+(a-b)i=3+5i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3a+b=3 \\ a-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z=2-3i$.

Vậy số phức z có phần thực là 2, phần ảo bằng -3, số phức liên hợp $\overline{z}=2+3i$, mô-đun bằng $|z|=\sqrt{13}$. □

③ $2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i$. **ĐS:** $z=2+3i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi, (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & 2(a+bi)+3(1-i)(a-bi)=1-9i \\ \Leftrightarrow\ & 2a+2bi+3a-3bi-3ai+3bi^2=1-9i \\ \Leftrightarrow\ & (5a-3b)-(3a+b)i=1-9i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5a-3b=1 \\ 3a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z=2+3i$.

Vậy phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng 3, số phức liên hợp $\overline{z}=2-3i$, mô-đun bằng $|z|=\sqrt{13}$. □

④ $(3z-\overline{z})(1+i)-5z=8i-1$. **ĐS:** $z=3-2i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi, (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & [3(a+bi)-(a-bi)](1+i)-5(a+bi)=8i-1 \\ \Leftrightarrow\ & (2a+4bi)(1+i)-5(a+bi)=8i-1 \\ \Leftrightarrow\ & 2a+2ai+4bi+4bi^2-5a-5bi=8i-1 \\ \Leftrightarrow\ & (-3a-4b)+(2a-b)i=8i-1 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -3a-4b=-1 \\ 2a-b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $z=3-2i$.

Vậy phần thực của số phức z là 3, phần ảo bằng -2, số phức liên hợp $\overline{z}=3+2i$, mô-đun bằng $|z|=\sqrt{13}$. □

⑤ $(2-3i)\,z+(4+i)\,\overline{z}=-(1+3i)^2$. **ĐS:** $z=-2+5i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&(2-3i)\,(a+bi)+(4+i)\,(a-bi)=8-6i\\ \Leftrightarrow\ &2a+2bi-3ai-3bi^2+4a-4bi+ai-bi^2=8-6i\\ \Leftrightarrow\ &(6a+4b)-2\,(a+b)\,i=8-6i\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}6a+4b=8\\2a+2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=5.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $z=-2+5i$.
Vậy phần thực của số phức z là -2, phần ảo bằng 5, số phức liên hợp $\overline{z}=-2-5i$, mô-đun $|z|=\sqrt{29}$. □

⑥ $(3-2i)\,z+5\,(1+i)\,\overline{z}=1+5i$. **ĐS:** $z=1-i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&(3-2i)\,(a+bi)+5\,(1+i)\,(a-bi)=1+5i\\ \Leftrightarrow\ &3a+3bi-2ai-2bi^2+5a-5bi+5ai-5bi^2=1+5i\\ \Leftrightarrow\ &(8a+7b)+(3a-2b)\,i=1+5i\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}8a+7b=1\\3a-2b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $z=1-i$.
Vậy phần thực của số phức z là 1, phần ảo bằng -1, số phức liên hợp $\overline{z}=1+i$ và mô-đun $|z|=\sqrt{2}$. □

⑦ $(3+i)\,\overline{z}+(1+2i)\,z=3-4i$. **ĐS:** $z=2+5i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&(3+i)\,(a-bi)+(1+2i)\,(a+bi)=3-4i\\ \Leftrightarrow\ &3a-3bi+ai-bi^2+a+bi+2ai+2bi^2=3-4i\\ \Leftrightarrow\ &(4a-b)+(3a-2b)\,i=3-4i\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}4a-b=3\\3a-2b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=5.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $z=2+5i$.
Vậy phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng 5, số phức liên hợp $\overline{z}=2-5i$, và mô-đun $|z|=\sqrt{29}$. □

⑧ $(1+2i)^2\,z+\overline{z}=4i-20$. **ĐS:** $z=4+3i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&(1+2i)^2\,(a+bi)+a-bi=4i-20\\ \Leftrightarrow\ &(-3+4i)\,(a+bi)+a-bi=4i-20\\ \Leftrightarrow\ &-3a-3bi+4ai+4bi^2+a-bi=4i-20\\ \Leftrightarrow\ &(-2a-4b)+(4a-4b)\,i=4i-20\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}-2a-4b=-20\\4a-4b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow z=4+3i.\end{aligned}$$

Vậy phần thực của số phức z là 4, phần ảo bằng 3, số phức liên hợp $\overline{z}=4-3i$, và mô-đun $|z|=5$. □

⑨ $z^2+|z|=0$. **ĐS:** $z=0;z=\pm i$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$(a+bi)^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2} + 2abi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ -b^2 + \sqrt{b^2} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ a^2 + \sqrt{a^2} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ a = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = \pm i. \end{array}\right.$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn đề bài là $z = 0, z = \pm i$. □

(10) $|z| + (\overline{z} - 3)\, i = 1$. **ĐS:** $z = 3 - 4i$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\sqrt{a^2+b^2} + (a - bi - 3)\, i = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} - bi^2 + (a-3)\, i = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} + b\right) + (a-3)\, i = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + b = 1 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \sqrt{b^2+9} = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow z = 3 - 4i.$$

Vậy phần thực của số phức z là 3, phần ảo bằng -4, số phức liên hợp $\overline{z} = 3 + 4i$. □

(11) $z + \overline{z} = 10$ và $|z| = 13$. **ĐS:** $z = 5 \pm 12i$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow \sqrt{b^2 + 25} = 13 \Rightarrow b = \pm 12$.
Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 5 \pm 12i$. □

(12) $|z + 1 - 2i| = |\overline{z} - 2 - i|$ và $|z - 1| = \sqrt{5}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z = 2 + 2i \\ z = -1 - i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có
$|z + 1 - 2i| = |\overline{z} - 2 - i| \Leftrightarrow |a + bi + 1 - 2i| = |a - bi - 2 - i|$
$\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-2)^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow a = b.$

Lại có $|z - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 5$. Thay $a = b$ vào ta được $(b-1)^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = -1. \end{array}\right.$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 2 + 2i$ và $z = -1 - i$. □

(13) $|z|^2 + 2z \cdot \overline{z} + |\overline{z}|^2 = 8$ và $z + \overline{z} = 2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có $z + \overline{z} = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Lại có $|z|^2 + 2z \cdot \overline{z} + |\overline{z}|^2 = 8 \Rightarrow 4\left(a^2 + b^2\right) = 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1. \end{array}\right.$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 1 + i$ và $z = 1 - i$. □

(14) $w = z + iz + z^2$ với $z + (2 - i)\, \overline{z} = 5 + i$. **ĐS:** $w = -3i$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} & z + (2-i)\, \overline{z} = 5 + i \\ \Leftrightarrow\ & a + bi + (2-i)(a - bi) = 5 + i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3a - b = 5 \\ -a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & w = 1 + i\,(1 - 2i) + (1 - 2i)^2 \Leftrightarrow w = -3i. \end{aligned}$$

Vậy số phức w cần tìm là $w = -3i$. □

(15) $w = z + 2\overline{z}$ với $(1-i)\,z + 2i\overline{z} = 5 + 3i$. **ĐS:** $w = 6 - i$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} & (1-i)\,z + 2i\overline{z} = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & (1-i)(a+bi) + 2i(a-bi) = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & a + bi - ai - bi^2 + 2ai - 2bi^2 = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & (a+3b) + (a+b)\,i = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a + 3b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases} \\ \Rightarrow\ & z = 2 + i \Rightarrow w = 2 + i + 2(2-i) = 6 - i. \end{aligned}$$

Vậy số phức w cần tìm là $w = 6 - i$. □

BÀI 3. Nhóm bài toán tìm các số phức z thỏa mãn biểu thức số phức là số thực, số thuần ảo.

(1) $|z| = \sqrt{5}$ và phần thực bằng 2 lần phần ảo. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = -2 - i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có phần thực bằng 2 lần phần ảo nên $a = 2b$.
Mặt khác $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a = 2b \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ (2b)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = -2 - i. \end{array}\right.$

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 2 + i, z = -2 - i$. □

(2) $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z = 1 \pm i \\ z = -1 \pm i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo nên $a^2 - b^2 = 0$.
Mặt khác $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 + i \\ z = -1 + i \\ z = 1 - i \\ z = -1 - i. \end{array}\right.$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 1 + i, z = -1 + i, z = 1 - i, z = -1 - i$. □

(3) $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\overline{z} + i)$ là số thực. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1 + 2i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có $(z-1)(\overline{z} + i) = z \cdot \overline{z} + zi - \overline{z} - i = a^2 + b^2 + (a + bi)\,i - (a - bi) - i = a^2 + b^2 - a - b + (a + b - 1)\,i$.
Do $(z-1)(\overline{z} + i)$ là số thực nên $a + b - 1 = 0$.
Ta lại có $|z - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a + bi - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 2$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a = 1 - b \\ a^2 + (b-1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 2(b-1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1 + 2i. \end{array}\right.$ □

④ $|2z-\overline{z}|=\sqrt{13}$ và $(1+2i)\,z$ là số thuần ảo. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=-2-i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có $(1+2i)\,z=(1+2i)\,(a+bi)=(a-2b)+(2a+b)\,i$ là số thuần ảo nên $a-2b=0\Rightarrow a=2b$.
Ta lại có $|2z-\overline{z}|=\sqrt{13}\Leftrightarrow|2\,(a+bi)-(a-bi)|=\sqrt{13}\Leftrightarrow|a+3bi|=\sqrt{13}\Leftrightarrow a^2+9b^2=13$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a=2b \\ a^2+9b^2=13 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2b \\ 4b^2+9b^2=13 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2b \\ b^2=1 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=-2-i. \end{array}\right.$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z=2+i, z=-2-i$. □

⑤ $|z-1|=\sqrt{5}$ và $(z-1)\,(\overline{z}+2i)$ là số thực. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2-2i \end{array}\right.$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có $(z-1)\,(\overline{z}+2i)=z\cdot\overline{z}+2iz-\overline{z}-2i=a^2+b^2+2i\,(a+bi)-(a-bi)-2i=a^2+b^2-a-2b+(2a+b-2)$ là số thực nên $2a+b-2=0\Rightarrow b=2-2a$.
Ta lại có $|z-1|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|a-1+bi|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-1)^2+b^2=5$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} b=2-2a \\ (a-1)^2+b^2=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2-2a \\ 5\,(a-1)^2=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2-2a \\ (a-1)^2=1 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=2-2i. \end{array}\right.$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z=2i, z=2-2i$. □

⑥ $z+\overline{z}=6$ và $z^2+2\overline{z}-8i$ là số thực. **ĐS:** $z=3+2i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có $z+\overline{z}=6\Leftrightarrow 2a=6\Leftrightarrow a=3$.
Ta lại có $z^2+2\overline{z}-8i=a^2-b^2+2abi+2\,(a-bi)-8i=a^2-b^2+2a-(2ab-2b-8)\,i$ là số thực nên $2ab-2b-8=0$.
Suy ra $b=2$.
Vậy số phức z thỏa mãn là $z=3+2i$. □

⑦ $|z-3i|=|1-i\overline{z}|$ và $z+\dfrac{9}{z}$ là số thuần ảo. **ĐS:** $z=2i$

Lời giải.

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có $z+\dfrac{9}{z}=a+bi+\dfrac{9}{a+bi}=a+bi+\dfrac{9\,(a-bi)}{a^2+b^2}$ là số thuần ảo nên $a+\dfrac{9a}{a^2+b^2}=0$.
TalLại có $|z-3i|=|1-i\overline{z}|\Leftrightarrow|a+bi-3i|=|1-i\,(a-bi)|\Leftrightarrow a^2+(b-3)^2=(1-b)^2+a^2\Leftrightarrow b=2$.
Suy ra $a+\dfrac{9a}{a^2+4}=0\Leftrightarrow a^3+13a=0\Leftrightarrow a=0$.
Vậy số phức z thỏa mãn là $z=2i$. □

DẠNG 1.2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán

Phương pháp giải.

— *Sử dụng hợp lý các phép toán cộng, trừ, nhân, chia để tìm được số phức z. Từ đó tìm được phần thực, phần ảo, mô-đun của z và tìm được $\overline{z}$.*

— *Hai số phức bằng nhau thì có mô-đun bằng nhau. Sử dụng các kết quả*

2 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

2 $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

2 $|z|=|\overline{z}|$.

2 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *với* $z_2\neq 0$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1.

① Cho z thỏa $(2+i)z+\dfrac{1-i}{1+i}=5-i$. Tìm các thuộc tính của $w=1+2z+z^2$. **ĐS:** $w=8-6i$

② Cho z thỏa $z=2+4i+2i(1-3i)$. Tìm các thuộc tính của z. **ĐS:** $z=8+6i$

③ Tính $z=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots+(1+i)^{20}$. **ĐS:** $z=\left(2^{10}+1\right)i-2^{10}$

Lời giải.

① Ta có $(2+i)z+\dfrac{1-i}{1+i}=5-i\Leftrightarrow(2+i)z+\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=5-i\Leftrightarrow(2+i)z+\dfrac{-2i}{2}=5-i$

$$\Leftrightarrow(2+i)z=5\Leftrightarrow z=\frac{5}{2+i}\Leftrightarrow z=\frac{5(2-i)}{5}=2-i.$$

Do đó, $w=1+2z+z^2=1+2(2-i)+(2-i)^2=1+4-2i+4-4i+i^2=8-6i$.
Vậy w có phần thực là 8, phần ảo là -6, mô-đun là $|w|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$ và $\overline{w}=8+6i$.

Nhận xét.

— *Về phương pháp tự luận, để thực hiện phép chia 2 số phức, ta cần nhân thêm số phức liên hợp của mẫu số. Chẳng hạn, trong lời giải trên ta có* $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$.

— *Nếu sử dụng Casio, ta chuyển về chế độ CMPLX (mode 2) (i tương ứng ENG). Chuyển vế tìm z và nhập* $\dfrac{5-i-\dfrac{1-i}{1+i}}{2+i}$ *sẽ được kết quả* $2-i$*, nghĩa là tìm được số phức* $z=2-i$*. Các phép toán còn lại thao tác tương tự trên Casio.*

② Ta có $z=2+4i+2i(1-3i)=2+4i+2i-6i^2=8+6i$.
Vậy z có phần thực là 8, phần ảo là 6, mô-đun là $|z|=\sqrt{8^2+6^2}=10$ và $\overline{z}=8-6i$.

③ Ta có số phức z là tổng của 21 số hạng đầu tiên của một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=1+i$.

Khi đó $z=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(1+i)^k=\dfrac{(1+i)^{21}-1}{i}$.

Ta lại có $(1+i)^{21}=\left[(1+i)^2\right]^{10}(1+i)=(2i)^{10}(1+i)=-2^{10}(1+i)$.

Vậy $z=\dfrac{-2^{10}(1+i)-1}{i}=\left(2^{10}+1\right)i-2^{10}$.

□

VÍ DỤ 2. Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<|z|\le 1$. **B.** $1<|z|\le 3$. **C.** $3<|z|\le 10$. **D.** $10<|z|\le 50$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $z-4=|z|+i|z|-4i-3iz\Leftrightarrow(1+3i)z=(|z|+4)+(|z|-4)i$.

Lấy mô-đun hai vế ta được $|(1+3i)z|=|(|z|+4)+(|z|-4)i|\Leftrightarrow|(1+3i)|\cdot|z|=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{10}|z|=\sqrt{2|z|^2+32}\Leftrightarrow 10|z|^2=2|z|^2+32$$

$$\Leftrightarrow 8|z|^2=32\Leftrightarrow|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2.$$

Nhận xét. *Lấy mô-đun hai vế của một biểu thức số phức thực ra là việc sử dụng phép kéo theo của hai số phức bằng nhau* $z_1=z_2\Rightarrow|z_1|=|z_2|$*. Do đó ta* **chỉ thực hiện được nó** *khi biểu thức giả thiết của bài toán được* **đưa về các dạng chuẩn sau**

— $a+bi=c+di$ *với* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

— $(a+bi)z=c+di$ *với* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

— $\dfrac{a+bi}{z}=c+di$ *hoặc* $\dfrac{a+bi}{\overline{z}}=c+di$ *với* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Ta thường sử dụng các tính chất $|z|=|\overline{z}|$, $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$, $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ *và* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *với* $z_2\neq 0$.

Chọn đáp án B

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Nhóm bài toán tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z, w.

① $(1+i)z = 14-2i$. **ĐS:** $z = 6-8i$

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{14-2i}{1+i} = \dfrac{(14-2i)(1-i)}{2} = \dfrac{12-16i}{2} = 6-8i$.
Vậy z có phần thực là 6, phần ảo là -8, mô-đun là $|z| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$ và $\overline{z} = 6+8i$. □

② $(1-i)z + (2-i) = 4-5i$. **ĐS:** $z = 3-i$

Lời giải.

Ta có $(1-i)z+(2-i) = 4-5i \Leftrightarrow (1-i)z = 2-4i \Leftrightarrow z = \dfrac{2-4i}{1-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(2-4i)(1+i)}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{6-2i}{2} \Leftrightarrow z = 3-i$.
Vậy z có phần thực là 3, phần ảo là -1, mô-đun là $|z| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$ và $\overline{z} = 3+i$. □

③ $w = z_1 - 2z_2$ biết rằng $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-3i$. **ĐS:** $w = -3+8i$

Lời giải.

Ta có $w = 1+2i-2(2-3i) = -3+8i$.
Vậy w có phần thực là -3, phần ảo là 8, mô-đun là $|w| = \sqrt{(-3)^2+8^2} = \sqrt{73}$ và $\overline{w} = -3-8i$. □

④ $w = z_1z_2$ biết rằng $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 3-4i$. **ĐS:** $w = 26+7i$

Lời giải.

Ta có $w = (2+5i)(3-4i) = 26+7i$.
Vậy w có phần thực là 26, phần ảo là 7, mô-đun là $|w| = \sqrt{26^2+7^2} = 5\sqrt{29}$ và $\overline{w} = 26-7i$. □

⑤ $(1-2i)z - \dfrac{9+7i}{3-i} = 5-2i$. **ĐS:** $z = 1+3i$

Lời giải.

Ta có $(1-2i)z - \dfrac{9+7i}{3-i} = 5-2i \Leftrightarrow (1-2i)z-(2+3i) = 5-2i \Leftrightarrow (1-2i)z = 7+i \Leftrightarrow z = \dfrac{7+i}{1-2i} \Leftrightarrow z = 1+3i$.
Vậy z có phần thực là 1, phần ảo là 3, mô-đun là $|z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ và $\overline{z} = 1-3i$. □

⑥ $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$. **ĐS:** $z = 2-3i$

Lời giải.

Ta có $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow 2i(2-i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow (2+4i)z = 8+i+(1+2i)z$.

$$\Leftrightarrow (1+2i)z = 8+i \Leftrightarrow z = \frac{8+i}{1+2i} \Leftrightarrow z = 2-3i.$$

Vậy z có phần thực là 2, phần ảo là -3, mô-đun là $|z| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$ và $\overline{z} = 2+3i$. □

BÀI 2. Nhóm bài toán lấy mô-đun hai vế của đẳng thức số phức (đề cần tính $|z|$ hoặc $P(|z|)$).

① Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn $2z-2 = (1-i)|\overline{z}| + (2-z\sqrt{2})i$. **ĐS:** $|z| = \sqrt{2}$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(2+i\sqrt{2})z = (|\overline{z}|+2) + (2-|\overline{z}|)i$.
Lấy mô-đun hai vế ta được $\sqrt{6}|z| = \sqrt{(|\overline{z}|+2)^2+(2-|\overline{z}|)^2} \Leftrightarrow 6|z|^2 = 2|\overline{z}|^2+8 \Leftrightarrow 6|z|^2 = 2|z|^2+8$

$$\Leftrightarrow 4|z|^2 = 8 \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

Vậy $|z| = \sqrt{2}$. □

② Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z\left[(2+3i)|\overline{z}| - 3+2i\right] - \sqrt{26} = 0$. Tính giá trị của $|\overline{z}|$. **ĐS:** $|\overline{z}| = 1$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $z\left[(2|\overline{z}|-3) + (3|\overline{z}|+2)i\right] = \sqrt{26}$.
Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} |z|\sqrt{(2|\overline{z}|-3)^2+(3|\overline{z}|+2)^2} = \sqrt{26} &\Leftrightarrow |z|^2\left(13|\overline{z}|^2+13\right) = 26 \\ &\Leftrightarrow |\overline{z}|^2\left(|\overline{z}|^2+1\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow |\overline{z}|^4+|\overline{z}|^2-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\overline{z}|^2 = 1 \\ |\overline{z}|^2 = -2 \quad (\text{vô lý}) \end{array}\right. \Leftrightarrow |\overline{z}| = 1. \end{aligned}$$

Vậy $|\overline{z}| = 1$. □

③ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1-i}{z} = \dfrac{(2-3i)\overline{z}}{|z|^2} + 2 - i$. Tính giá trị của $|z|$. **ĐS:** $|z| = 1$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{1-i}{z} = \dfrac{(2-3i)\overline{z}}{z\overline{z}} + 2 - i \Leftrightarrow \dfrac{1-i}{z} = \dfrac{2-3i}{z} + 2 - i \Leftrightarrow \dfrac{-1+2i}{z} = 2 - i$.

Lấy mô-đun hai vế ta được $\dfrac{\sqrt{5}}{|z|} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z| = 1$.

Vậy $|z| = 1$. □

④ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1+2i)|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{z} + i - 2$. Tính giá trị của $|\overline{z}|$. **ĐS:** $|\overline{z}| = 1$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(|z|+2) + (2|z|-1)i = \dfrac{\sqrt{10}}{z}$.

Lấy mô-đun hai vế ta được $\sqrt{(|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2\left(5|z|^2+5\right) = 10 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 = -2 \quad (\text{vô lý}) \end{array}\right. \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Vậy $|\overline{z}| = |z| = 1$. □

⑤ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z| = \dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}} + 3 - 2i$. Tính giá trị của $|z|$. **ĐS:** $|z| = 1$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(2|z|-3) + (3|z|+2)i = \dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}}$.

Lấy mô-đun hai vế ta được $\sqrt{(2|z|-3)^2 + (3|z|+2)^2} = \dfrac{\sqrt{26}}{|\overline{z}|} \Leftrightarrow \sqrt{13|z|^2+13} = \dfrac{\sqrt{26}}{|z|}$

$$\Leftrightarrow |z|^2\left(|z|^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 = -2 \quad (\text{vô lý}) \end{array}\right. \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Vậy $|z| = 1$. □

⑥ Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1-3i)|\overline{z}| = \dfrac{4\sqrt{10}}{z} + 3 + i$. Tính giá trị của $P = |\overline{z}|^4 + |z|^2$. **ĐS:** $P = 16$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(|\overline{z}|-3) + (-3|\overline{z}|-1)i = \dfrac{4\sqrt{10}}{z}$.

Lấy mô-đun hai vế ta được $\sqrt{(|\overline{z}|-3)^2 + (-3|\overline{z}|-1)^2} = \dfrac{4\sqrt{10}}{|z|} \Leftrightarrow \sqrt{10|\overline{z}|^2+10} = \dfrac{4\sqrt{10}}{|\overline{z}|}$

$$\Leftrightarrow |\overline{z}|^2\left(|\overline{z}|^2+1\right) = 16 \Leftrightarrow |\overline{z}|^4 + |\overline{z}|^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow |\overline{z}|^4 + |z|^2 = 16.$$

Vậy $P = 16$. □

DẠNG 1.3. Chuẩn hóa số phức

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho số phức $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4.$$

ĐS: -1

Lời giải.

Chuẩn hóa $z_1=1$, suy ra $|z_1|=1$, đặt $z_2=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, khi đó $|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$.
Ta có

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=1\\|z_1-z_2|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=1\\|(1-a)-bi|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\(1-a)^2+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\a^2+b^2-2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Chọn $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $z_1-z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
Ta thấy $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Do đó $P=\left[\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2\right]^2+\left[\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2\right]^2=-1$. □

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$, $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Biết số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$.

A. $|b|=\dfrac{3}{8}$. **B.** $|b|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $|b|=\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.
Ta có $|z|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{3}{4}$ nên $\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{3}{4}$ hay $a^2+b^2=\dfrac{9}{16}$.
Lại có $\dfrac{|z_1-z_2|}{|z_2|}=\left|\dfrac{z_1-z_2}{z_2}\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}-1\right|=|z-1|=\dfrac{\sqrt{37}}{4}$. Suy ra $\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{37}}{4}$ hay $a^2+b^2-2a=\dfrac{21}{16}$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{9}{16}\\a^2+b^2-2a=\dfrac{21}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{9}{16}\\-2a=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{8}\\b^2=\dfrac{27}{64}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{8}\\|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}.\end{cases}$$

Vậy $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.
Chọn đáp án C □

BÀI 2. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=2$, $|z_2|=\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2. Biết rằng $\widehat{MON}=45^\circ$ với O là gốc tọa độ. Tính $\left|z_1^2+4z_2^2\right|$.

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $4\sqrt{5}$.

Lời giải.
Ta có $z_1^2+4z_2^2=z_1^2-(2iz_2)^2=(z_1-2iz_2)(z_1+2iz_2)$.
Lại có $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=45^\circ$ và $|z_1^2+4z_2^2|=|(z_1-2iz_2)(z_1+2iz_2)|=|z_1-2iz_2|\cdot|z_1+2iz_2|$.
Mặt khác

$$|z_1-2iz_2|^2=|z_1|^2+4|iz_2|^2-4|z_1||iz_2|\cos 45^\circ=2^2+4\cdot(\sqrt{2})^2-4\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4.$$
$$|z_1+2iz_2|^2=|z_1|^2+4|iz_2|^2+4|z_1||iz_2|\cos 45^\circ=2^2+4\cdot(\sqrt{2})^2+4\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=20.$$

Do đó $\left|z_1^2+4z_2^2\right|=\sqrt{4\cdot20}=4\sqrt{5}$.
Chọn đáp án D □

BÀI 3. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ và $z_1+z_2+z_3=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

A. $P=-1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}P&=z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=-2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)\\&=-2z_1z_2z_3\left(\frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}\right)=-2z_1z_2z_3\left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}+\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}+\frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2}\right)=-2z_1z_2z_3\left(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3\right)\\&=-2z_1z_2z_3\cdot\overline{z_1+z_2+z_3}=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

DẠNG 1.4. Bài toán sử dụng bất đẳng thức trong số phức

Vì số phức $z = a+bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ. Do đó ta có thể xem véc-tơ $\overrightarrow{OM} = (a;b)$ cũng biểu diễn cho số phức z. Nghĩa là có thể sử dụng bất đẳng thức véc-tơ trong phép toán $\max - \min$ của số phức. Cho ba véc-tơ $\vec{u} = (a;b)$, $\vec{v} = (x;y)$, $\vec{w} = (m;n)$, khi đó

① $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$. *Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều, tức là* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ *hay* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

② $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. *Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều, tức là* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ *hay* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

③ $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$. *Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều, tức là* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ *hay* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

④ $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$. *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}$.

Các bất đẳng thức cổ điển thường được sử dụng

① *Bất đẳng thức Cauchy*

- *Với* $a \geq 0,\ b \geq 0$ *thì* $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. *Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* $a = b$.
- *Với* $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ *thì* $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. *Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* $a = b = c$.

② *Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpxki)*

- *Với* $a > 0,\ b > 0$ *và x, y bất kỳ ta luôn có* $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$ *(dạng cộng mẫu số). Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ *hay* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.
- *Với a, b, x, y bất kỳ ta luôn có* $\begin{cases} (a \cdot x + b \cdot y)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \\ |a \cdot x + b \cdot y| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \end{cases}$. *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ *hay* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.
- *Với a, b, c, x, y, z bất kỳ ta luôn có* $\begin{cases} (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \\ |a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z| \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \end{cases}$. *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ *hay* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

> ***Lưu ý***
>
> ! ① *Ta có thể sử dụng phương pháp hàm số (hoặc tam thức) để tìm* $\max - \min$.
>
> ② *Ngoài ra còn sử dụng phương pháp hình học.*

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z|$. **ĐS:** $P_{\max} = 9$.

Lời giải.

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$ (hay $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$).
Ta có

$$4 = |z - 3 + 4i| = |z - (3 - 4i)| \geq |z| - |3 - 4i| \Rightarrow 4 \geq |z| - 5 \Rightarrow |z| \leq 9.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9.
Cách 2. Sử dụng lượng giác hóa.
Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x-3) + (y+4)i| = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1.$$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \sin\alpha \\ \dfrac{y+4}{4} = \cos\alpha \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 4\sin\alpha + 3 \\ y = 4\cos\alpha - 4 \end{cases}$, khi đó

$$\begin{aligned} P &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(4\sin\alpha+3)^2+(4\cos\alpha-4)^2} = \sqrt{41+24\sin\alpha-32\cos\alpha} = \sqrt{41+\sqrt{24^2+32^2}\sin(\alpha-\beta)} \\ &= \sqrt{41+40\sin(\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

với $\dfrac{24}{\sqrt{24^2+32^2}} = \cos\beta$, $\dfrac{32}{\sqrt{24^2+32^2}} = \sin\beta$.
Lại có

$$-1 \le \sin(\alpha-\beta) \le 1 \Leftrightarrow -40 \le 40\sin(\alpha-\beta) \le 40 \Leftrightarrow 1 \le 41+40\sin(\alpha-\beta) \le 81 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{41+40\sin(\alpha-\beta)} \le 9.$$

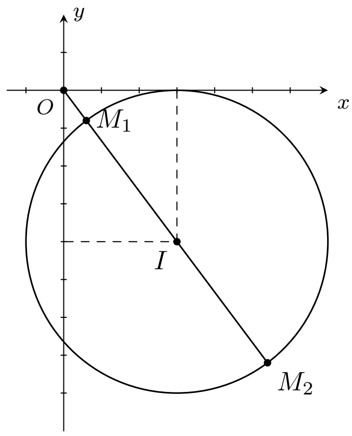
Suy ra $P_{\min} = 1$ và $P_{\max} = 9$.
Cách khác. Áp dụng bất đẳng thức $|a\cdot x + b \cdot y| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.
Ta có

$$\begin{aligned} & |24\sin\alpha - 32\cos\alpha| \le \sqrt{[24^2+(-32)^2]\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)} = 40 \\ \Leftrightarrow\ & -40 \le 24\sin\alpha - 32\cos\alpha \le 40 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \le 41+24\sin\alpha-32\cos\alpha \le 81 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \le \sqrt{41+24\sin\alpha-32\cos\alpha} \le 9. \end{aligned}$$

Suy ra $P_{\min} = 1$ và $P_{\max} = 9$.
Cách 3. Sử dụng phương pháp hình học.
Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|z-3+4i| = 4 \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i| = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2 = 16.$$

Do đó tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(3;-4)$ và bán kính $R = 4$.



Từ hình vẽ ta có

$$\begin{cases} |z|_{\min} = OM_1 = OI - IM_1 = OI - R = 1 \\ |z|_{\max} = OM_2 = OM_1 + 2R = 9. \end{cases}$$

Để tìm z có mô-đun lớn nhất và z có mô-đun nhỏ nhất chính là tọa độ hai điểm M_1, M_2 cũng là tọa độ giao điểm của đường thẳng OI và đường tròn.
Đường thẳng OI qua $O(0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{OI} = (3;-4)$ có dạng $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4}$ hay $y = -\dfrac{4}{3}x$.
Ta tìm được các giao điểm $M_1\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$, $M_2\left(\dfrac{27}{5};-\dfrac{36}{5}\right)$.

Nhận xét. *Cách 2 và 3 tổng quát hơn, có thể tìm $P_{\max}$ và $P_{\min}$ cùng một lúc. Tùy vào yêu cầu của bài toán mà ta chọn phương pháp cho phù hợp cho trắc nghiệm hoặc tự luận.*

□

VÍ DỤ 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz+4-3i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$. **ĐS:** $|z|_{\min} = 4$

Lời giải.
Cách 1. Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|iz+4-3i| = 1 \Leftrightarrow |(4-y)+(x-3)i| = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2 = 1.$$

Đặt $\begin{cases} x-3 = \sin\alpha \\ y-4 = \cos\alpha \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 3+\sin\alpha \\ y = 4+\cos\alpha \end{cases}$, khi đó

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3+\sin\alpha)^2+(4+\cos\alpha)^2} = \sqrt{6\sin\alpha+8\cos\alpha+26}.$$

Mặt khác

$$|6\sin\alpha+8\cos\alpha| \le \sqrt{(6^2+8^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow && |6\sin\alpha + 8\cos\alpha| \le 10 \\ &\Leftrightarrow && -10 \le 6\sin\alpha + 8\cos\alpha \le 10 \\ &\Leftrightarrow && 16 \le 6\sin\alpha + 8\cos\alpha + 26 \le 36 \\ &\Leftrightarrow && 4 \le \sqrt{6\sin\alpha + 8\cos\alpha + 26} \le 6. \end{aligned}$$

Suy ra $|z|_{\min} = 4$, $|z|_{\max} = 6$.
Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} - \vec{v}| \ge |\vec{u}| - |\vec{v}|$ (hay $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$).
Ta có

$$1 = |iz + 4 - 3i| = |4 - 3i - (-iz)| \ge |4 - 3i| - |-iz| = 5 - |z| \Rightarrow |z| \ge 4.$$

Suy ra $|z|_{\min} = 4$. □

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |\bar{z}|$. **ĐS:** $P_{\max} = \sqrt{2}$
Lời giải.
Ta có

$$1 = |z^2 - i| \ge |z^2| - |i| \Leftrightarrow 1 \ge |z|^2 - 1 \Leftrightarrow |z|^2 \le 2 \Rightarrow |z| \le \sqrt{2}.$$

Lại có $P = |\bar{z}| = |z|$. Do đó $P_{\max} = \sqrt{2}$. □

BÀI 2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất. **ĐS:** $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$
Lời giải.
Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết đề bài ta có

$$\begin{aligned} & && |x + yi - 2 - 4i| = |x + yi - 2i| \\ &\Leftrightarrow && |(x-2) + (y-4)i| = |x + (y-2)i| \\ &\Leftrightarrow && \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \\ &\Leftrightarrow && x + y - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow && y = 4 - x. \end{aligned}$$

Cách 1. Sử dụng đánh giá hằng đẳng thức $A^2 \ge 0$.
Ta có
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \ge 2\sqrt{2}.$$

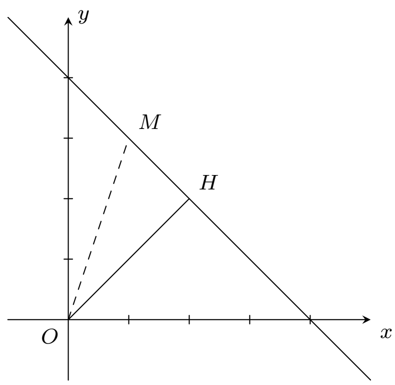
Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 0$ hay $x = 2$.
Vậy số phức z có mô-đun nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.
Cách 2. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \ge \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$.
Ta có
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1}} \ge \sqrt{\frac{(x+y)^4}{1+1}} \Rightarrow |z| \ge 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2$.
Vậy số phức z có mô-đun nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.
Cách 3. Sử dụng hình học.

Tập hợp biểu diễn số phức z là đường thẳng $d\colon x + y - 4 = 0$.
Số phức có mô-đun nhỏ nhất khi và chỉ khi $|z|_{\min} = OH$ và số phức cần tìm chính là tọa độ điểm H à hình chiếu của điểm O lên d.
Vì $OH \perp d$ nên phương trình của OH có dạng $x - y + m = 0$.
Lại có $O(0;0)$ thuộc OH nên $m = 0$, suy ra phương trình của OH là $x - y = 0$.
Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy số phức z có mô-đun nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.



□

BÀI 3. Trong các số phức thỏa mãn $|z-i| = |\bar{z}-2-3i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất. **ĐS:** $|z|_{\min} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.
Gọi $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết đề bài ta có

$$|x+(y-1)i| = |(x-2)-(y+3)i| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = (x-2)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 4x-8y-12=0 \Leftrightarrow x = 2y+3.$$

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2y+3)^2+y^2} = \sqrt{5y^2+12y+9} = \sqrt{5\left(y+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $y = -\dfrac{6}{5}$, $x = \dfrac{3}{5}$.
Vậy $|z|_{\min} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ khi $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}i$. □

BÀI 4. Trong các số phức thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất. **ĐS:** $|z|_{\min} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.
Gọi $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết đề bài ta có

$$|(-y-3)+xi| = |(x-2)+(y-1)i| \Leftrightarrow (-y-3)^2+x^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 4x+8y+4=0 \Leftrightarrow x=-2y-1.$$

Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2y-1)^2+y^2} = \sqrt{5y^2+4y+1} = \sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $y = -\dfrac{2}{5}$, $x = -\dfrac{1}{5}$.
Vậy $|z|_{\min} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ khi $z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$. □

BÀI 5. Trong các số phức thỏa $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất. **ĐS:** $|z|_{\min} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.
Gọi $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}(z-1)(\bar{z}+2i) &= z\cdot\bar{z}+2iz-\bar{z}-2i = |z|^2+2i(z-1)-\bar{z} = x^2+y^2+2i(x+yi-1)-(x-yi)\\ &= x^2+y^2+2xi-2y-2i-x+yi = (x^2+y^2-x-2y)+(2x+y-2)i.\end{aligned}$$

Vì $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực nên $2x+y-2=0$ hay $y = 2-2x$.
Ta có

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(2-2x)^2} = \sqrt{5x^2-8x+4} = \sqrt{5\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{2}{5}$.
Vậy $|z|_{\min} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ khi $z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i$. □

BÀI 6. Trong các số phức thỏa mãn $|z-1| = |z-i|$, tìm mô-đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z+2-i$.
ĐS: $|w|_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải.
Gọi $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết đề bài ta có

$$|(x-1)+yi| = |x+(y-1)i| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow -2x+2y=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Ta có $w = 2z+2-i = 2x+2yi+2-i = 2x+2+(2y-1)i = (2x+2)+(2x-1)i$.
Khi đó

$$|w| = |(2x+2)+(2x-1)i| = \sqrt{(2x+2)^2+(2x-1)^2} = \sqrt{8x^2+4x+5} = \sqrt{8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -\dfrac{1}{4}$, $y = -\dfrac{1}{4}$.
Vậy $|w|_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $z = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$. □

BÀI 7. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z+2-2i| = |z-4i|$ và $w = iz+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

ĐS: $|w|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải.
Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết đề bài ta có

$$|(x+2)+(y-2)i| = |x+(y-4)i| \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2 = x^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow 4x+4y-8=0 \Leftrightarrow y = 2-x.$$

Ta có $w = iz+1 = xi - y + 1 = (1-y) + xi = (x-1) + xi$.
Khi đó

$$|w| = \sqrt{(x-1)^2+x^2} = \sqrt{2x^2-2x+1} = \sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $|w|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$. □

BÀI 8. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right|$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.
Đặt $w = \dfrac{z+i}{z}$, ta có

$$wz = z+i \Leftrightarrow (w-1)z = i \Leftrightarrow |(w-1)z| = |i| \Leftrightarrow |w-1||z| = 1 \Leftrightarrow |w-1| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |w-1| \leq \frac{1}{2}.$$

Lại có

$$|w| - 1 \leq |w-1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \leq \frac{3}{2}.$$

Mặt khác

$$|-1| - |-w| \leq |-1-(-w)| \Leftrightarrow 1 - |w| \leq |w-1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \geq \frac{1}{2}.$$

Suy ra $P_{\min} = \dfrac{1}{2}$, $P_{\max} = \dfrac{3}{2}$. Do đó tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức là $\dfrac{3}{4}$.
Chọn đáp án A □

BÀI 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tìm $M+m$.

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Lời giải.
Ta có Gọi $E(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z, $A(3;0)$, $B(-3;0)$.
Ta có $EA + EB = 8$ nên E thuộc elip có trục lớn bằng 8, tiêu cự bằng 6, trục bé bằng $2\sqrt{7}$.
Do đó $|z|_{\max} = 4$, $z_{\min} = \sqrt{7}$.
Suy ra $M = 4$, $m = \sqrt{7}$. Vậy $M + m = 4 + \sqrt{7}$.
Chọn đáp án B □

BÀI 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$. **ĐS:** $P_{\max} = 2\sqrt{10}$.

Lời giải.
Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết đề bài ta có

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1-x^2.$$

Từ kết quả trên ta thấy $x \in [-1;1]$.
Mặt khác

$$\begin{aligned} P &= |1+z| + 3|1-z| = |(x+1)+yi| + 3|(1-x)-yi| = \sqrt{(x+1)^2+y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2+y^2} \\ &= \sqrt{x^2+2x+1+1-x^2} + 3\sqrt{1-2x+x^2+1-x^2} = \sqrt{2(x+1)} + 3\sqrt{2(1-x)}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(x+1)} + 3\sqrt{2(1-x)}$ trên đoạn $[-1;1]$ có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(x+1)}} - \dfrac{3}{\sqrt{2(1-x)}}, \forall x \in (-1;1)$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = -\dfrac{4}{5} \in [-1;1]$.

Lại có $f(-1) = 6$, $f(1) = 2$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10}$.

Do đó $P_{\max} = 2\sqrt{10}$ khi $x = -\frac{4}{5}$, $y = \pm\frac{3}{5}$ tức là $z = \frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$.

Cách khác. Sử dụng bất đẳng thức $a \cdot x + b \cdot y \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & P = 1 \cdot \sqrt{(x+1)^2+y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2+y^2} \le \sqrt{(1^2+3^2)\left[(x+1)^2+y^2+(1-x)^2+y^2\right]} \\ \Rightarrow\ & P \le \sqrt{20(x^2+y^2+1)} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

□

BÀI 11. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

A. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2\sqrt{3}$. **D.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

ĐS: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} \quad & \Leftrightarrow \quad z_1z_2 = (z_1+z_2)(z_2+2z_1) \Leftrightarrow z_1z_2 = z_1z_2 + 2z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 \pm i}{2}. \end{aligned}$$

Do đó $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

BÀI 12. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z^2 - 2z + 5\right| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. **B.** $\min|w| = 2$. **C.** $\min|w| = 1$. **D.** $\min|w| = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \left|z^2-2z+5\right| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \\ \Leftrightarrow\ & |(z-1-2i)(z-1+2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \\ \Leftrightarrow\ & |z-1-2i| \cdot |z-1+2i| = |z-1+2i| \cdot |z-1+3i| \quad (1) \end{aligned}$$

① $z = 1 - 2i \Rightarrow w = -1 \Rightarrow |w| = 1$.

② $z \neq 1 - 2i$. Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow\ & |z-1-2i| = |z-1+3i| \\ \Leftrightarrow\ & |(x-1)+(y-2)i| = |(x-1)+(y+3)i| \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y-2)^2 = (x-1)^2+(y+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & y = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Với $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = x - \frac{1}{2}i$. Khi đó $w = x - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{9}{4}} \geqslant \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow \min|w| = \frac{3}{2}$ khi $z = 2 - \frac{1}{2}i$.

Vậy $\min|w| = 1$.

Chọn đáp án C □

BÀI 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z^2+4\right| = \left|z^2+2iz\right|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |z+i|$.

A. $\min P = 2$. **B.** $\min P = 1$. **C.** $\min P = 3$. **D.** $\min P = 4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \left|z^2+4\right| = \left|z^2+2iz\right| \\ \Leftrightarrow\ & |(z-2i)(z+2i)| = |z(z+2i)| \\ \Leftrightarrow\ & |z-2i| \cdot |z+2i| = |z| \cdot |z+2i| \quad (*) \end{aligned}$$

① $z = -2i \Rightarrow P = |-i| = 1$.

② $z \neq -2i$. Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Leftrightarrow \quad |z - 2i| = |z| \\ &\Leftrightarrow \quad |x + (y-2)i| = |x + yi| \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 1.\end{aligned}$$

Với $y = 1 \Rightarrow z = x + i$. Khi đó $P = |x + 2i| = \sqrt{x^2 + 4} \geqslant 2$.
$\Rightarrow \min P = 2$ khi $z = i$.

Vậy $\min P = 1$.
Chọn đáp án B □

BÀI 14. Cho số phức $z = x + 2iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thay đổi thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Tính tổng S của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x - y$.

A. $S = -\sqrt{5}$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = \sqrt{5}$. **D.** $S = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

$|z| = 1 \Leftrightarrow |x + 2iy| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant -y \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leq x - y \leq \dfrac{3}{2}$.

Do đó $\min P = -\dfrac{3}{2}$ khi $x = -1; y = -\dfrac{1}{2}$ và $\max P = \dfrac{3}{2}$ khi $x = 1; y = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $S = 0$.

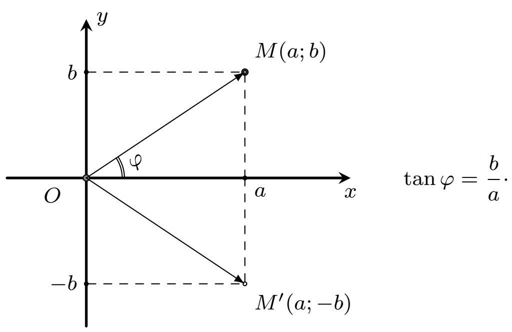
Chọn đáp án B □

BÀI 2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

① Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

② Các điểm $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ và $\overline{z} = a - bi$.



Bài toán: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

— Bước 1: Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$)

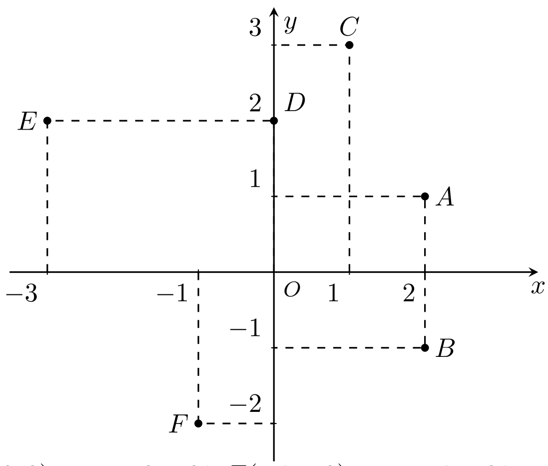
— Bước 2 : Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$\circ Ax+By+C=0$	Là đường thẳng $d\colon Ax+By+C=0$.
$\circ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.
$\circ x^2+y^2+2ax+2by+c=0$	Là đường tròn (C) có tâm $I(-a;-b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$\circ (x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.
$\circ x^2+y^2+2ax+2by+c\le 0$	Là hình tròn (C) có tâm $I(-a;-b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$\circ R_1^2\le (x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2$	Là hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính R_1 và R_2.
$\circ y=ax^2+bx+c$	Là Parabol (P) có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
$\circ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} MF_1+MF_2=2a \\ F_1F_2=2c<2a \end{cases}$	Là đường Elip (E) có trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$.
$\circ \left\lvert\overrightarrow{MA}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{MB}\right\rvert$	Là đường trung trực của đoạn AB.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Nhóm 1. Bài toán xác định điểm biểu diễn số phức cơ bản và bài toán liên quan.

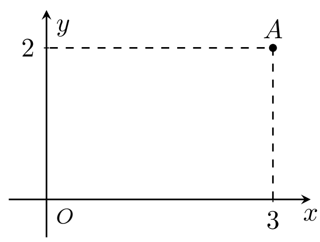
Câu 1. Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có:
Điểm $A(2;1)$ biểu diễn cho số phức $z_1=2+i$.
Điểm $B(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_2=\ldots$.
Điểm $C(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_3=\ldots$.
Điểm $D(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_4=\ldots$.
Điểm $E(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_5=\ldots$.
Điểm $F(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_6=\ldots$.



ĐS: $B(2;-1), z_2=2-i$; $C(1;3), z_3=1+3i$; $D(0;2), z_4=2i$; $E(-3;2), z_5=-3+2i$; $F(-1;-2), z_2=-1-2i$.

! Số phức $z_1=2+i$ và số phức liên hợp $\overline{z}_1=z_2=2-i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A và B đối xứng nhau qua trục Ox.

Câu 2. Điểm A trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức z.
Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.



A. Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.
B. Phần thực là 3 và phần ảo là -2.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$.
D. Phần thực là -3 và phần ảo là -2.

Lời giải.
Số phức $z=3+2i$ nên số phức liên hợp $\overline{z}=3-2i$.
Vậy $\overline{z}$ có phần thực là 3 và phần ảo là -2.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho số phức $z=2-i$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm điểm biểu diễn số phức $w=iz$.
A. $M(-1;2)$. **B.** $N(2;-1)$. **C.** $P(2;1)$. **D.** $Q(1;2)$.

Lời giải.
$w=iz=i(2-i)=2i-i^2=1+2i$. Suy ra điểm biểu diễn số phức $w=iz$ là $Q(1;2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $2i+z(1-i)=i(3-i)$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức z.
A. $M_3(1;0)$. **B.** $M_1(0;1)$. **C.** $M_4(0;2)$. **D.** $M_2(0;-1)$.

Lời giải.

Ta có: $2i+z(1-i)=i(3-i)\Leftrightarrow z=\dfrac{i(3-i)-2i}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}=i$.
Suy ra điểm biểu diễn số phức z là $M_1(0;1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho số phức $z=3-2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w=z+i\cdot\overline{z}$.
A. $A(1;-5)$. **B.** $M(5;-5)$. **C.** $M(1;1)$. **D.** $M(5;1)$.

Lời giải.
Ta có: $w=z+i\cdot\overline{z}=3-2i+i\cdot(3+2i)=3-2i+3i+2i^2=3-2i+3i-2=1+i$.
Suy ra điểm biểu diễn số phức w là $M(1;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 6. Điểm $M(x_0;y_0)$ biểu diễn của số phức z thỏa $(1+i)z+(2+i)\overline{z}=3+i$. Tính $2x_0+3y_0$.
A. -1. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải.
Do $M(x_0;y_0)$ biểu diễn của số phức z nên $z=x_0+y_0i$.
Ta có:
$(1+i)(x_0+y_0i)+(2+i)(x_0-y_0i)=3+i\Leftrightarrow 3x_0+(2x_0-y_0)i=3+i\Leftrightarrow\begin{cases}3x_0=3\\2x_0-y_0=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\y_0=1.\end{cases}$
Vậy $2x_0+3y_0=2+3=5$.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1=1-3i$, $z_2=-4-6i$ có các điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ lần lượt là M, N. Gọi z là số phức mà có điểm biểu diễn là trung điểm đoạn MN. Tính mô-đun của số phức z.
A. $|z|=3\sqrt{10}$. **B.** $|z|=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.
Ta có $M(1;-3)$ và $N(-4;-6)$.
I là trung điểm đoạn MN nên $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$.
Mà z là số phức có điểm biểu diễn là trung điểm I đoạn MN nên $z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}i$.
Vậy $|z|=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Nhận xét. *Vì điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$ là $M(a;b)$ hay $\overrightarrow{OM}=(a;b)$. Do đó cần nhớ những kiến thức cơ bản về véctơ, hệ trục Oxy và hệ thức lượng trong tam giác.*
Cho ham giác ABC, hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ và R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi tam giác ABC.

① *Các phép toán cơ bản trên vectơ:*
- *Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.*
- *Quy tắc đường chéo hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.*

② $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

③ *M là trung điểm của $AB\Rightarrow x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ và $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.*
G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$ và $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$.

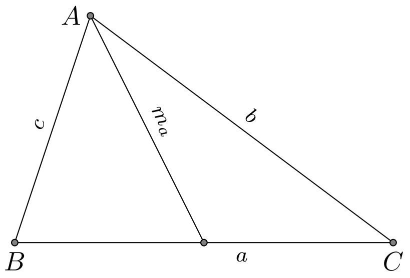
④ *Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}$.*

⑤ *Hai vectơ cùng phương $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ $(b_1,\ b_2\neq 0)$.*

⑥ *Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\\ \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}\end{cases}$*

⑦ *Định lí hàm sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.*

⑧ *Định lí hàm cos:* $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos C \end{cases}.$

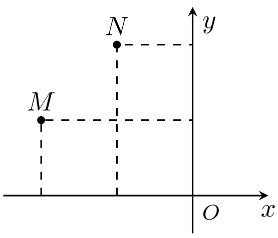


⑨ *Công thức trung tuyến:* $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2\left(b^2+a^2\right)-c^2}{4} \end{cases}.$

⑩ *Diện tích:* $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$*: nửa chu vi.*

Câu 8. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 như hình bên dưới. Hỏi khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|z_1 - z_2| = MN$.
B. $|z_1| = OM$.
C. $|z_2| = ON$.
D. $|z_1 + z_2| = MN$.



Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, suy ra $M(a_1; b_1)$, $N(a_2; b_2)$

$\Rightarrow MN = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$.

Ta có $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \neq MN$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i$ và điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = \dfrac{1}{2}(1+i)\, z_1$. Tính diện tích S của tam giác OMN với O là gốc tọa độ.

A. $S = \dfrac{15}{2}$.
B. $S = \dfrac{25}{4}$.
C. $S = \dfrac{25}{2}$.
D. $S = \dfrac{31}{4}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = \dfrac{1}{2}(1+i)\, z_1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}i \Rightarrow M(3; -4)$, $N\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{NO} = \left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{NM} = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{NO}.\overrightarrow{NM} = 0 \Rightarrow \triangle OMN$ vuông tại N.

$NO = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ và $NM = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\triangle OMN} = \dfrac{1}{2} \cdot NO \cdot NM = \dfrac{25}{4}$.

Chọn đáp án B □

Cần nhớ: *Tính diện tích* $\triangle ABC$: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a; b) \\ \overrightarrow{AC} = (c; d) \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$.

Câu 10. Trong mặt phẳng phức cho 3 điểm lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (1+i)^2$, $z_3 = m - i$. Tìm tham số m để tam giác ABC vuông tại B.

A. $m = 3$.
B. $m = -2$.
C. $m = -3$.
D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 + i \Rightarrow A(1; 1)$, $z_1 = (1+i)^2 = 2i \Rightarrow B(0; 2)$, $z_3 = m - i \Rightarrow C(m, -1)$.

$\overrightarrow{BA} = (1; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (m; -3)$.

Để $\triangle ABC$ vuông tại $B \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot m + (-1) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 3-2i$, $z_3 = -3-2i$. Hỏi khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. B và C đối xứng nhau qua trục tung.

B. Trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G\left(1; \dfrac{2}{3}\right)$.

C. A và B đối xứng nhau qua trục hoành.

D. A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3+2i \Rightarrow A(3;2)$, $z_2 = 3-2i \Rightarrow B(3;-2)$, $z_3 = -3-2i \Rightarrow C(-3;-2)$.

B và C đối xứng nhau qua trục tung.

Trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(1; -\dfrac{2}{3}\right) \neq \left(1; \dfrac{2}{3}\right)$.

A và B đối xứng nhau qua trục hoành.

$OA = OB = OC = \sqrt{13}$ nên A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho $ABCD$ là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1-i$, $2+3i$, $3+i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D.

A. $z = 2-3i$. **B.** $z = 4+5i$. **C.** $z = 4+3i$. **D.** $z = 2+5i$.

Lời giải.

Ta có $A(1;-1), B(2;3), C(3;1)$.

Gọi $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow D(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (1;4)$, $\overrightarrow{DC} = (3-x; 1-y)$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3-x \\ 4 = 1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3. \end{cases}$

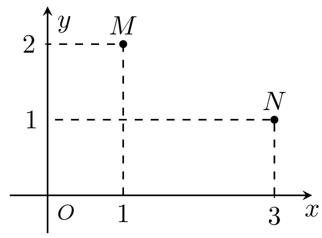
Vậy $z = 2-3i$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.

Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Hỏi điểm P biểu thị cho số phức nào sau đây?

A. $z_4 = 3-3i$. **B.** $z_3 = -2+i$. **C.** $z_2 = 4+i$. **D.** $z_1 = 2-i$.



Lời giải.

Ta có $O(0;0), M(1;2), N(3;1)$ và $OMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow P(2;-1) \Rightarrow P$ biểu thị số phức $z_1 = 2-i$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = (1-i)\cdot(2+i)$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = -1-3i$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác ABC là tam giác vuông nhưng không cân.

B. Tam giác ABC là tam giác cân nhưng không đều, không vuông.

C. Tam giác ABC là tam giác vuông cân.

D. Tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3-i$ nên $A(3;-1), B(1;3), C(-1;-3)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2;-6)$.

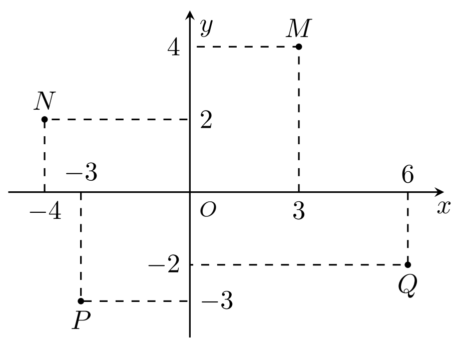
Do $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = 2\sqrt{5} \end{cases}$ nên tam giác ABC vuông cân tại A.

Chọn đáp án C □

Câu 15.

Cho số phức z thỏa $|z| = 2\sqrt{10}$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong hình?

A. Điểm P. **B.** Điểm M. **C.** Điểm N. **D.** Điểm Q.

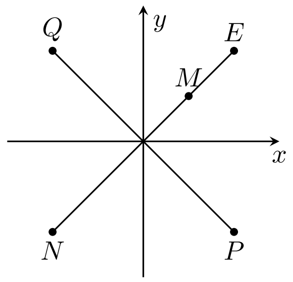


Lời giải.

Ta có: $M(3;4) \Rightarrow |z| = 5$, $N(-4;2) \Rightarrow |z| = 2\sqrt{5}$, $P(-3;-3) \Rightarrow |z| = 3\sqrt{2}$, $Q(6;-2) \Rightarrow |z| = 2\sqrt{10}$.
Chọn đáp án D □

Câu 16.
Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

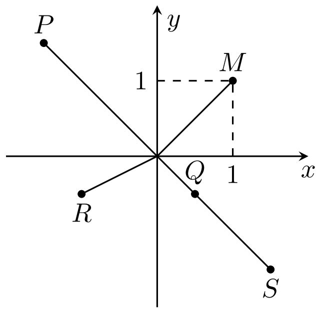
A. Điểm N. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm E. **D.** Điểm P.



Lời giải.
Dựa vào hình vẽ ta thấy $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OM}$.
Vậy điểm E là điểm biểu diễn của số phức $2z$.
Chọn đáp án C □

Câu 17.
Cho số phức z có điểm biểu diễn là M. Biết số phức $w = \dfrac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?

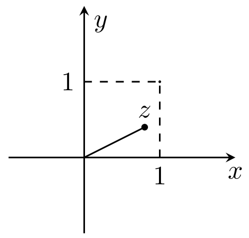
A. Điểm S. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm P. **D.** Điểm R.



Lời giải.
Ta có $M(1;1)$ nên $z = 1 + i$, suy ra $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.
Vậy điểm biểu diễn của w là điểm Q.
Chọn đáp án B □

Câu 18.
Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{i}{\bar{z}}$ nằm ở góc phần tư thứ mấy trong hệ trục tọa độ Oxy?

A. Thứ nhất. **B.** Thứ hai. **C.** Thứ ba. **D.** Thứ tư.



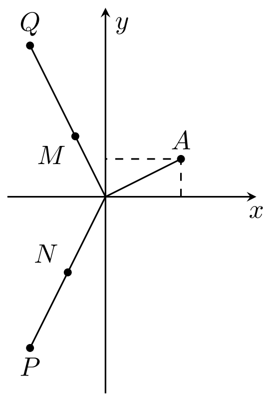
Lời giải.
Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}^+)$ sao cho $0 < x^2 + y^2 < \sqrt{2}$. Khi đó

$$w = \frac{i}{\bar{z}} = \frac{i}{x - yi} = \frac{i(x + yi)}{x^2 + y^2} = \frac{-y + xi}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}i.$$

Mà $-\dfrac{y}{x^2+y^2} < 0$; $\dfrac{x}{x^2+y^2} > 0 \Rightarrow$ điểm biểu diễn của số phức w nằm ở góc phần tư thứ hai.
Chọn đáp án B □

Câu 19.
Cho số phức z thỏa $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z. Biết trong hình vẽ, điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q. Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là điểm nào sau đây?

A. Điểm Q. **B.** Điểm M. **C.** Điểm N. **D.** Điểm P.



Lời giải.

Gọi $z=x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R}^+)$ sao cho $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$. Khi đó

$$w=\frac{1}{iz}=\frac{1}{-y+xi}=\frac{-y-xi}{x^2+y^2}=-2y-2xi.$$

Dựa vào hình vẽ của đề bài ta suy ra điểm biểu diễn của số phức w là điểm P.
Chọn đáp án D □

Câu 20. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=(2-3i)\cdot(1+i)$ và φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

A. $\sin 2\varphi=-\dfrac{5}{13}$. **B.** $\sin 2\varphi=\dfrac{5}{13}$. **C.** $\sin 2\varphi=\dfrac{13}{5}$. **D.** $\sin 2\varphi=-\dfrac{13}{5}$.

Lời giải.
Ta có $z=(2-3i)\cdot(1+i)=5-i$ nên $M(5;-1)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(5;-1)$.
Do $\tan\varphi=-\dfrac{1}{5}$ nên $\sin 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=-\dfrac{5}{13}$.
Chọn đáp án A □

Câu 21. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=(2+i)^2\cdot(4-i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

A. $\cos 2\varphi=-\dfrac{87}{475}$. **B.** $\cos 2\varphi=\dfrac{87}{475}$. **C.** $\cos 2\varphi=-\dfrac{87}{425}$. **D.** $\cos 2\varphi=\dfrac{87}{425}$.

Lời giải.
Ta có $z=(2+i)^2\cdot(4-i)=16+13i$ nên $M(16;13)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(16;13)$.
Do $\tan\varphi=\dfrac{13}{16}$ nên $\cos 2\varphi=\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{87}{425}$.
Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho A,B,C,D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i, 1+\sqrt{3}+i$, $1+\sqrt{3}-i, 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I, bán kính R. Hỏi tọa độ điểm I biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z=\sqrt{3}$. **B.** $z=1-i\sqrt{3}$. **C.** $z=1$. **D.** $z=-1$.

Lời giải.
Ta có $A(1;2), B\left(1+\sqrt{3};1\right), C\left(1+\sqrt{3};-1\right), D(1;-2)$ và gọi $I(x;y)$.
Do $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I, bán kính R nên $IA=IB=IC=ID=R$. Suy ra:
+) $IA^2=ID^2\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+2)^2\Rightarrow y=0$.
+) $IA^2=IB^2\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=\left(x-1-\sqrt{3}\right)^2+(y-1)^2$, với $y=0$ ta tìm được $x=1$.
Vậy $I(1;0)$ nên I biểu diễn số phức $z=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hai số phức z_0, z_1 khác 0 thỏa mãn $z_0^2-z_0z_1+z_1^2=0$. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z_0, z_1. Hỏi tam giác OAB là tam giác gì?

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông tại O.
C. Tam giác tù. **D.** Tam giác có một góc bằng 45°.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} z_0^2-z_0z_1+z_1^2=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2-\frac{z_0}{z_1}+1=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{z_0}{z_1}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{z_0}{z_1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_0=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\\ z_0=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1.\end{array}\right. \end{aligned}$$

— Xét trường hợp $z_0=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1$.

$$OA=|z_0|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|\cdot|z_1|=|z_1|=OB.$$

$$AB = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = |z_1 - z_0| = \left|z_1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = |z_1| = OB.$$

Như vậy: $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.

— Xét trường hợp $z_0 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_1$.

$$OA = |z_0| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right| \cdot |z_1| = |z_1| = OB.$$

$$AB = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = |z_1 - z_0| = \left|z_1 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = \left|\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}z_1\right| = |z_1| = OB.$$

Như vậy: $OA = OB = AB \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều.

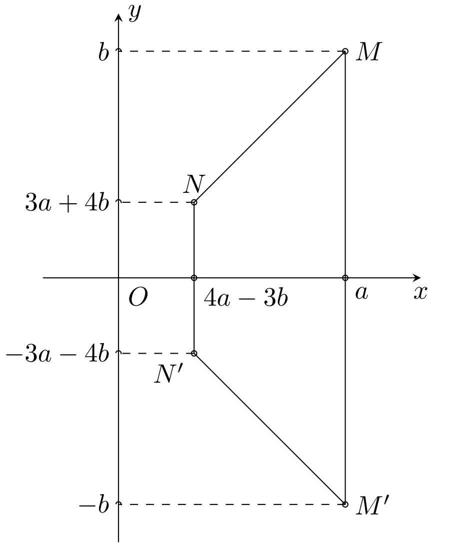
Tóm lại, ba điểm O, A, B tạo thành tam giác đều (O là gốc tọa độ).

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z\,(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 4i - 5|$.

A. $\min P = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\min P = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\min P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\min P = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải.



Đặt $z = a + bi$. Khi đó $z(4 + 3i) = 4a - 3b + (3a + 4b)i$ và $M(a; b); M'(a; -b), N(4a - 3b; 3a + 4b), N'(4a - 3b; -3a - 4b)$.

$\overrightarrow{MN} = (3a - 3b; 3a + 3b)$.

Theo tính chất đối xứng thì $MNN'M'$ là hình thang cân. Do đó để $MNN'M'$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với trục Ox hay $3a + 3b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

Ta có

$$\begin{aligned}|z + 4i - 5| &= \sqrt{(a - 5)^2 + (b + 4)^2}\\ &= \sqrt{(a - 5)^2 + (-a + 4)^2} = \sqrt{2a^2 - 18a + 41}\\ &= \sqrt{2\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{9}{2}$ hay $z = \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2}i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$ bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $z = \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2}i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$ và nếu gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, iz_2 thì $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính $P = \left|z_1^2 + 4z_2^2\right|$.

A. $P = \sqrt{5}$. **B.** $P = 4\sqrt{7}$. **C.** $P = 3\sqrt{3}$. **D.** $P = 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_1^2 + 4z_2^2 = z_1^2 - (2iz_2)^2 = (z_1 - 2iz_2)(z_1 + 2iz_2)$.

Lại có $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = 30^\circ$ và $|z_1^2 + 4z_2^2| = |(z_1 - 2iz_2)(z_1 + 2iz_2)| = |z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2|$.

Mặt khác

$$|z_1 - 2iz_2|^2 = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 - 4|z_1||iz_2|\cos 30^\circ = 2^2 + 4 \cdot (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

$$|z_1 + 2iz_2|^2 = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 + 4|z_1||iz_2|\cos 30^\circ = 2^2 + 4 \cdot (\sqrt{3})^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 28.$$

Do đó $\left|z_1^2 + 4z_2^2\right| = \sqrt{4 \cdot 28} = 4\sqrt{7}$.

Chọn đáp án (B) □

DẠNG 2.1. Tập hợp điểm của số phức là đường thẳng và các bài toán liên quan

Phương pháp giải

BÀI 1.

① Cho số phức z thỏa mãn $|z-(1+i)| = |z+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3-4i)z - 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó. **ĐS:** $3x + y + 8 = 0$

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$w = (3-4i)z - 1 = x + yi \Leftrightarrow z = \frac{x+1+yi}{3-4i}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|z-(1+i)| = |z+2i| &\Leftrightarrow \left|\frac{x+1+yi}{3-4i} - (1+i)\right| = \left|\frac{x+1+yi}{3-4i} + 2i\right| \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{(x-6)+(y+1)i}{3-4i}\right| = \left|\frac{(x+9)+(y+6)i}{3-4i}\right| \\
&\Leftrightarrow \frac{|(x-6)+(y+1)i|}{|3-4i|} = \frac{|(x+9)+(y+6)i|}{|3-4i|} \\
&\Leftrightarrow |(x-6)+(y+1)i| = |(x+9)+(y+6)i| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+9)^2+(y+6)^2} \\
&\Leftrightarrow (x-6)^2+(y+1)^2 = (x+9)^2+(y+6)^2 \\
&\Leftrightarrow 3x+y+8 = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng có phương trình $3x + y + 8 = 0$. □

② Cho các số phức z thỏa mãn $|z-2-i| = |\bar{z}+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i)z - 2$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó. **ĐS:** $3x + y + 5 = 0$

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$w = (1+i)z - 2 = x + yi \Leftrightarrow z = \frac{(x+y+2)-(x-y+2)i}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|z-2-i| = |\bar{z}+2i| &\Leftrightarrow \left|\frac{(x+y+2)-(x-y+2)i}{2} - 2 - i\right| = \left|\frac{(x+y+2)+(x-y+2)i}{2} + 2i\right| \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{(x+y-2)-(x-y+4)i}{2}\right| = \left|\frac{(x+y+2)+(x-y+6)i}{2}\right| \\
&\Leftrightarrow |(x+y-2)-(x-y+4)i| = |(x+y+2)+(x-y+6)i| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x+y-2)^2+(x-y+4)^2} = \sqrt{(x+y+2)^2+(x-y+6)^2} \\
&\Leftrightarrow (x+y-2)^2+(x-y+4)^2 = (x+y+2)^2+(x-y+6)^2 \\
&\Leftrightarrow 3x+y+5 = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng có phương trình $3x + y + 5 = 0$. □

BÀI 2. Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i| = |2i-1-2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $20x - 16y - 47 = 0$. **B.** $20x + 16y - 47 = 0$. **C.** $20x - 16y + 47 = 0$. **D.** $20x + 16y + 47 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
& 2|z-2+3i| = |2i-1-2\bar{z}| \\
\Leftrightarrow\ & 2|(x+yi)-2+3i| = |2i-1-2(x-yi)| \\
\Leftrightarrow\ & 2|(x-2)+(y+3)i| = |(-2x-1)+(2y+2)i| \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(-2x-1)^2+(2y+2)^2} \\
\Leftrightarrow\ & 4\left[(x-2)^2+(y+3)^2\right] = (-2x-1)^2+(2y+2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 20x-16y-47 = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $20x - 16y - 47 = 0$.
Chọn đáp án A $\square$

Câu 26. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

A. Đường thẳng $d\colon 4x - 6y + 13 = 0$.
B. Đường thẳng $d\colon 4x + 6y - 13 = 0$.
C. Đường thẳng $d\colon 6x - 4y - 13 = 0$.
D. Đường thẳng $d\colon 6x - 4y + 13 = 0$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & |z| = |\bar{z} - 2 + 3i| \\ \Leftrightarrow\ & |x + yi| = |(x - yi) - 2 + 3i| \\ \Leftrightarrow\ & |x + yi| = |(x - 2) + (3 - y)i| \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (3 - y)^2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (3 - y)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x + 6y - 13 = 0. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $4x + 6y - 13 = 0$.
Chọn đáp án B $\square$

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(1 + i)$ là số thực.

A. Trục Oy. **B.** Trục Oz. **C.** $y = -x$. **D.** $y = x$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có $z(1 + i) = (x + yi)(1 + i) = (x - y) + (x + y)i$.
Để $z(1 + i)$ là số thực điều kiện cần và đủ là $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.
Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $y = -x$.
Chọn đáp án C $\square$

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $w = z(2+3i)+5-i$ là số thuần ảo.

A. Đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$.
B. Đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$.
C. Đường thẳng $3x + 2y + 1 = 0$.
D. Đường thẳng $3x + 2y - 1 = 0$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$w = z(2 + 3i) + 5 - i = (x + yi)(2 + 3i) + 5 - i = (2x - 3y + 5) + (3x + 2y - 1)i.$$

Để $w = z(2 + 3i) + 5 - i$ là số thuần ảo điều kiện cần và đủ là $2x - 3y + 5 = 0$.
Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $2x - 3y + 5 = 0$.
Chọn đáp án B $\square$

Câu 29. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn số phức z thuộc đường thẳng $d\colon 3x - y + 1 = 0$.

A. $z = 1 - 4i$.
B. $z = 1 + 4i$ hoặc $z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$.
C. $z = -1 - 2i$ hoặc $z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}i$.
D. $z = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2i| = \sqrt{5} \ &\Leftrightarrow\ |(x + yi) - 2i| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow\ |x + (y - 2)i| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + (y - 2)^2 = 5. \end{aligned}$$

Mặt khác, điểm biểu diễn số phức z thuộc đường thẳng $d\colon 3x - y + 1 = 0$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $z = 1 + 4i$ hoặc $z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$.
Chọn đáp án B $\square$

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i| = |z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2-i)z+1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $x-7y-9=0$. **B.** $x+7y-9=0$. **C.** $x+7y+9=0$. **D.** $x-7y+9=0$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x+yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ thỏa bài toán.

Ta có $w = (2-i)z+1 = x+yi \Leftrightarrow z = \dfrac{x-1+yi}{2-i}$.

Từ đó

$$\begin{aligned} |z-i| = |z-1+2i| &\Leftrightarrow \left|\frac{x-1+yi}{2-i} - i\right| = \left|\frac{x-1+yi}{2-i} - 1 + 2i\right| \\ &\Leftrightarrow \frac{|(x-2)+(y-2)i|}{|2-i|} = \frac{|(x-1)+(y+5)i|}{|2-i|} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2} \\ &\Leftrightarrow x+7y+9=0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Nhận xét. *Bài toán cho z, yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn w (loại gián tiếp) thường ta sẽ gọi $w = x+yi$, sau đó biểu thị z theo x, y sẽ tìm được tập hợp điểm.*

Câu 31. Cho tất cả các số phức $z = x+yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2i-1| = |z+i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $P = 2x+3y$.

A. $P = 9$. **B.** $P = 11$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = 5$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} |z+2i-1| = |z+i| &\Leftrightarrow |x+yi+2i-1| = |x+yi+i| \\ &\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i| = |x+(y+1)i| \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = x^2+(y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x-y-2=0. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\Delta\colon x-y-2=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;3)$ trên đường thẳng Δ,khi đó $H(3;1)$.

Ta luôn có $MA \geq MH$. Nên, MA ngắn nhất khi và chỉ khi $M \equiv H$, hay $M(3;1)$.

Do đó $P = 2x+3y = 2\cdot 3 + 3\cdot 1 = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hai số phức $z_1 = 1+3i$ và $z_2 = -5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô-đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Lời giải.

Vì điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ nên $M = (2y-1;y)$. Do đó $z_3 = (2y-1)+yi$.

Ta có $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1 = 3\left[(2y-1)+yi\right] - (-5-3i) - 2(1+3i) = 6y + (3y-3)i$.

$|w| = \sqrt{(6y)^2+(3y-3)^2} = \sqrt{45\left(y-\dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{36}{5}} \geq \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = \dfrac{1}{5}$.

Như vậy $|w|$ nhỏ nhất khi $M\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Chọn đáp án D □

DẠNG 2.2. Tập hợp điểm của số phức là đường tròn, hình tròn, hình vành khăn

Phương pháp giải

BÀI 1. ① Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(3-4i)| = 2$. **ĐS:** Đường tròn $(C)\colon (x-3)^2+(y+4)^2 = 4$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn bài toán.
Ta có

$$\begin{aligned}|z-(3-4i)|=2 &\Leftrightarrow |x+yi-(3-4i)|=2\\ &\Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i|=2\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=4.\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp các điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn bài toán là đường tròn $(C)\colon (x-3)^2+(y+4)^2=4$ có tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$. □

2. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=(1-2i)z+3$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R. **ĐS:** $I(1;4)$, $R=5\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}w=(1-2i)z+3 &\Leftrightarrow z=\frac{w-3}{1-2i}\\ &\Leftrightarrow z+2=\frac{w-3}{1-2i}+2\\ &\Leftrightarrow z+2=\frac{w-1-4i}{1-2i}\\ &\Leftrightarrow z+2=\frac{(x-1)+(y-4)i}{1-2i}.\end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned}&|z+2|=\left|\frac{(x-1)+(y-4)i}{1-2i}\right|\\ \Leftrightarrow\ & 5=\frac{|(x-1)+(y-4)i|}{|1-2i|}\\ \Leftrightarrow\ & 5=\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}}{\sqrt{5}}\\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y-4)^2=(5\sqrt{5})^2.\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(1;4)$, bán kính $R=5\sqrt{5}$. □

3. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\,|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}+1-2i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=(3-4i)z-1+2i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R. **ĐS:** $I(-1;2)$, $R=5$.

Lời giải.

Ta có $(2+i)\,|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}+1-2i \Leftrightarrow (2\,|z|-1)+(|z|+2)\,i=\dfrac{\sqrt{10}}{z}$.
Lấy mô-đun hai vế, ta có

$$\begin{aligned}&|(2\,|z|-1)+(|z|+2)\,i|=\left|\frac{\sqrt{10}}{z}\right|\\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(2\,|z|-1)^2+(|z|+2)^2}=\frac{\sqrt{10}}{|z|}\\ \Leftrightarrow\ & 5\,|z|^2+5=\frac{10}{|z|^2}\\ \Leftrightarrow\ & 5\,|z|^4+5\,|z|^2-1=0\Leftrightarrow |z|=1.\end{aligned}$$

Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$w=(3-4i)z-1+2i\Leftrightarrow z=\frac{w+1-2i}{3-4i}\Leftrightarrow z=\frac{(x+1)+(y-2)i}{3-4i}.$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned}|z|=\left|\frac{(x+1)+(y-2)i}{3-4i}\right| &\Leftrightarrow |z|=\frac{|(x+1)+(y-2)i|}{|3-4i|}\\ &\Leftrightarrow 1=\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{5}\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=25.\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$. □

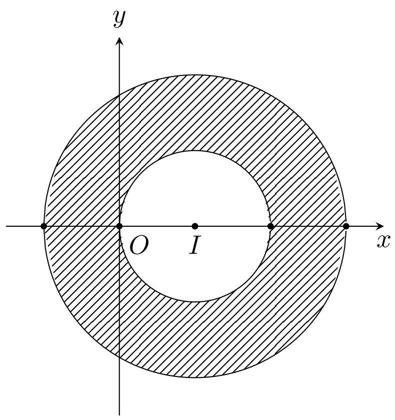
④ Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $1<|z-1|<2$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn bài toán.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} 1<|z-1|<2 &\Leftrightarrow 1<|(x-1)+yi|<2\\ &\Leftrightarrow 1<\sqrt{(x-1)^2+y^2}<2\\ &\Leftrightarrow 1<(x-1)^2+y^2<4.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn $1<|z-1|<2$ là hình vành khăn là phần nằm giữa hai đường tròn đồng tâm $I(1;0)$ với bán kính $R_1=1$, $R_2=2$ như hình vẽ bên (không tính những điểm nằm trên hai đường tròn).



□

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$.

A. $x^2+(y-1)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+y^2=4$. **C.** $x^2+(y+1)^2=2$. **D.** $(x+1)^2+y^2=2$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} |z-i|=|(1+i)z| &\Leftrightarrow |(x+yi)-i|=|(1+i)(x+yi)|\\ &\Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0\\ &\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2.\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$ là đường tròn (C) có phương trình $x^2+(y+1)^2=2$.

Chọn đáp án C □

!

Cần nhớ những kiến thức cơ bản về đường tròn trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

① Để viết phương trình đường tròn ta cần tìm tâm $I(a;b)$ và bán kính R.

Dạng 1 Đường tròn (C) có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Dạng 2 Đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

② Chu vi đường tròn $p=2\pi R$ và diện tích hình tròn $S=\pi R^2$.

Câu 34. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=4$ là một đường tròn. Tính chu vi p của đường tròn đó.

A. $p=4\pi$. **B.** $p=2\pi$. **C.** $p=8\pi$. **D.** $p=16\pi$.

Lời giải.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=4$ là đường tròn tâm $I(3;-5)$, bán kính $R=4$. Chu vi đường tròn là $p=2\pi R=8\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích S bằng bao nhiêu?

A. $S=5\pi$. **B.** $S=\dfrac{5\pi}{4}$. **C.** $S=\dfrac{5\pi}{2}$. **D.** $S=25\pi$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.
Ta có $(z+1)(\bar{z}-2i)=(x+yi+1)(x-yi-2i)=[(x+1)+yi]\cdot[x-(y+2)i]=(x^2+y^2+x+2y)-(2x+y+2)i$.
$(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2+y^2+x+2y=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4}$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I\left(-\frac{1}{2};-1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Diện tích hình tròn (C) là $S=\pi R^2=\frac{5\pi}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z-i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

A. $I(2;-1)$, $R=2$. **B.** $I(2;1)$, $R=4$. **C.** $I(2;-1)$, $R=4$. **D.** $I(-2;1)$, $R=2$.

Lời giải.
Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w=2z-i \quad &\Leftrightarrow \quad z=\frac{w+i}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad z-1=\frac{w+i}{2}-1\\ &\Leftrightarrow \quad z-1=\frac{w-2+i}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad z-1=\frac{(x-2)+(y+1)i}{2}.\end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} &|z-1|=\left|\frac{(x-2)+(y+1)i}{2}\right|\\ \Leftrightarrow \quad & 2=\frac{|(x-2)+(y+1)i|}{2}\\ \Leftrightarrow \quad & 2=\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}}{2}\\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2+(y+1)^2=16.\end{aligned}$$

Như vậy,tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z-i$ là một đường tròn tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=4$.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=1$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

A. $I(3;\sqrt{3})$, $R=4$. **B.** $I(3;\sqrt{3})$, $R=2$. **C.** $I(3;-\sqrt{3})$, $R=4$. **D.** $I(-3;\sqrt{3})$, $R=2$.

Lời giải.
Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w=(1+i\sqrt{3})z+2 \quad &\Leftrightarrow \quad z=\frac{w-2}{1+i\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow \quad z-1=\frac{w-2}{1+i\sqrt{3}}-1\\ &\Leftrightarrow \quad z-1=\frac{w-3-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow \quad z-1=\frac{(x-3)+(y-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} &|z-1|=\left|\frac{(x-3)+(y-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}}\right|\\ \Leftrightarrow \quad & 1=\frac{\left|(x-3)+(y-\sqrt{3})i\right|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|}\\ \Leftrightarrow \quad & 1=\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2}}{2}\\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=4.\end{aligned}$$

Như vậy,tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn tâm $I(3;\sqrt{3})$ và bán kính $R=2$.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\bar{z}+1-i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

A. $I(2;1)$, $R=3$. **B.** $I(1;2)$, $R=\sqrt{3}$. **C.** $I(2;1)$, $R=4$. **D.** $I(1;2)$, $R=5$.

Lời giải.

Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w=\bar{z}+1-i &\Leftrightarrow \bar{z}=w-1+i\\ &\Leftrightarrow \bar{z}=(x-1)+(y+1)i\\ &\Leftrightarrow z=(x-1)-(y+1)i\\ &\Leftrightarrow z-1+2i=(x-1)-(y+1)i-1+2i\\ &\Leftrightarrow z-1+2i=(x-2)+(1-y)i. \end{aligned}$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} &|z-1+2i|=|(x-2)+(1-y)i|\\ \Leftrightarrow\ & 3=\sqrt{(x-2)^2+(1-y)^2}\\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2+(y-1)^2=9. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\bar{z}+1-i$ là một đường tròn tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|^2=\dfrac{z\bar{z}}{2}$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+1$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R.

A. $I(0;-2)$, $R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1;-4)$, $R=\sqrt{10}$. **C.** $I(0;2)$, $R=\sqrt{5}$. **D.** $I(-1;-4)$, $R=\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} w=(1+2i)z+1 &\Leftrightarrow z=\frac{w-1}{1+2i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{(x-1)+yi}{1+2i}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |z+1|^2=\frac{z\bar{z}}{2} &\Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)+yi}{1+2i}+1\right|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)+yi}{1+2i}\cdot\frac{(x-1)-yi}{1-2i}\\ &\Leftrightarrow \left|\frac{x+(y+2)i}{1+2i}\right|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2+y^2}{5}\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+(y+2)^2}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2+y^2}{5}\\ &\Leftrightarrow 2\left[x^2+(y+2)^2\right]=(x-1)^2+y^2\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+4)^2=10. \end{aligned}$$

Như vậy,tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+1$ là một đường tròn tâm $I(-1;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)\,|\bar{z}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{z}+1+i$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz-1+i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

A. $I(-1;1)$, $R=\sqrt{2}$. **B.** $I(1;1)$, $R=\sqrt{2}$. **C.** $I(1;1)$, $R=2$. **D.** $I(-1;1)$, $R=2$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)\,|\bar{z}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{z}+1+i\Leftrightarrow(1-i)\,|z|=\dfrac{2\sqrt{3}}{z}+1+i\Leftrightarrow(|z|-1)-(|z|+1)\,i=\dfrac{2\sqrt{3}}{z}$.

Lấy mô-đun hai vế, ta có

$$\begin{aligned}
&\left|(|z|-1)-(|z|+1)\,i\right| = \left|\frac{2\sqrt{3}}{z}\right| \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(|z|-1)^2+(|z|+1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{|z|} \\
\Leftrightarrow\ & (|z|-1)^2+(|z|+1)^2 = \frac{12}{|z|^2} \\
\Leftrightarrow\ & |z|^4+|z|^2-6=0 \\
\Rightarrow\ & |z|^2=2 \\
\Rightarrow\ & |z|=\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Gọi $w=x+yi$ $(x,\,y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$w=iz-1+i \Leftrightarrow z=-iw-i-1 \Leftrightarrow z=(y-1)+(-x-1)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
|z|=|(y-1)+(-x-1)| \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}=\sqrt{(y-1)^2+(-x-1)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2=2.
\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $(3-7i)\,|z|=\dfrac{176-82i}{\bar{z}}+7+3i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+i)z+2-i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R.

A. $I(2;-1)$, $R=5$. **B.** $I(2;1)$, $R=5$. **C.** $I(2;-1)$, $R=5\sqrt{2}$. **D.** $I(2;1)$, $R=5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(3-7i)\,|z|=\dfrac{176-82i}{\bar{z}}+7+3i \Leftrightarrow (3\,|z|-7)-(7\,|z|+3)\,i=\dfrac{176-82i}{\bar{z}}$.
Lấy mô-đun hai vế, ta có

$$\begin{aligned}
&\left|(3\,|z|-7)-(7\,|z|+3)\,i\right| = \left|\frac{176-82i}{\bar{z}}\right| \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(3\,|z|-7)^2+(7\,|z|+3)^2} = \frac{\sqrt{37700}}{|z|} \\
\Leftrightarrow\ & (3\,|z|-7)^2+(7\,|z|+3)^2 = \frac{37700}{|z|^2} \\
\Leftrightarrow\ & |z|^4+|z|^2-650=0 \\
\Rightarrow\ & |z|^2=25 \\
\Rightarrow\ & |z|=5.
\end{aligned}$$

Gọi $w=x+yi$ $(x,\,y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$w=(1+i)z+2-i \Leftrightarrow z=\frac{w-2+i}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{(x-2)+(y+1)i}{1+i}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&|z|=\left|\frac{(x-2)+(y+1)i}{1+i}\right| \\
\Leftrightarrow\ & 5=\frac{|(x-2)+(y+1)i|}{|1+i|} \\
\Leftrightarrow\ & 5=\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=5\sqrt{2} \\
\Rightarrow\ & (x-2)^2+(y+1)^2=50.
\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=5\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $|3z+i|^2 \leq z\cdot\bar{z}+9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=\bar{z}+1-i$.

A. Hình tròn $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2 \leq \dfrac{73}{64}$.
B. Đường tròn $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2 \leq \dfrac{73}{64}$.
C. Đường tròn $(x-1)^2+(y+3)^2 \leq 9$.
D. Hình tròn $(x-1)^2+(y+3)^2 \leq 9$.

Lời giải.
Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$w=\bar{z}+1-i \Leftrightarrow \bar{z}=(x-1)+(y+1)i \Leftrightarrow z=(x-1)-(y+1)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
& |3z+i|^2 \leq z\cdot\bar{z}+9 \\
\Leftrightarrow\ & |3\left[(x-1)-(y+1)i\right]+i|^2 \leq (x-1)^2+(y+1)^2+9 \\
\Leftrightarrow\ & |3(x-1)-(3y+2)i|^2 \leq (x-1)^2+(y+1)^2+9 \\
\Leftrightarrow\ & 9(x-1)^2+(3y+2)^2 \leq (x-1)^2+(y+1)^2+9 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2+\left(y+\frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}.
\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2 \leq \dfrac{73}{64}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ với $|z-1|\leq 2$.

A. Hình tròn $x^2+(y-1)^2\leq 4$.
B. Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 16$.
C. Hình tròn $x^2+(y-1)^2=16$.
D. Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$.

Lời giải.
Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$w=(1+i\sqrt{3})z+2 \Leftrightarrow z=\frac{w-2}{1+i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z=\frac{(x-2)+yi}{1+i\sqrt{3}}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
& |z-1|\leq 2 \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{(x-2)+yi}{1+i\sqrt{3}}-1\right|\leq 2 \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{(x-3)+(y-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}}\right|\leq 2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2}}{2}\leq 2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 16.
\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 16$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1|\leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

A. $S=4\pi$. **B.** $S=2\pi$. **C.** $S=3\pi$. **D.** $S=\pi$.

Lời giải.
Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$w=(1+i)z+1 \Leftrightarrow z=\frac{w-1}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{(x-1)+yi}{1+i}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
& |z-1|\leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{(x-1)+yi}{1+i}-1\right|\leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{(x-1)+yi}{1+i}-1\right|\leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{2}}\leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x-2)^2+(y-1)^2\leq 2.
\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 2$. Bán kính hình tròn là $R=\sqrt{2}$, diện tích của hình tròn là $S=\pi R^2=2\pi$.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=\bar{z}+1-i$ với $|2z+i|^2 \leq 3z\bar{z}+1$ là một hình tròn. Tìm tâm I và bán kính R.

A. $I(1;-1)$, $R=2$. **B.** $I(1;1)$, $R=2$. **C.** $I(-1;-1)$, $R=2$. **D.** $I(1;1)$, $R=4$.

Lời giải.
Gọi $w=x+yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$w=\bar{z}+1-i \Leftrightarrow \bar{z}=w-1+i \Leftrightarrow z=(x-1)-(y+1)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} & |2z+i|^2 \leq 3z\bar{z}+1 \\ \Leftrightarrow\ & |2\left[(x-1)-(y+1)i\right]+i|^2 \leq 3\left[(x-1)^2+(y+1)^2\right]+1 \\ \Leftrightarrow\ & |2(x-1)-(2y+1)i|^2 \leq 3\left[(x-1)^2+(y+1)^2\right]+1 \\ \Leftrightarrow\ & 4(x-1)^2+(2y+1)^2 \leq 3\left[(x-1)^2+(y+1)^2\right]+1 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 \leq |z+1-i| \leq 2$ là hình vành khăn. Tính chu vi P của hình vành khăn.

A. $P=4\pi$. **B.** $P=\pi$. **C.** $P=2\pi$. **D.** $P=3\pi$.

Lời giải.
Giả sử số phức z có dạng $z=x+iy$, với $x,\, y \in \mathbb{R}$.
Khi đó $z+1-i=x+iy+1-i=(x+1)+(y-1)\,i$.
Do đó $|z+1-i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.
Xét $|z+1-i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=4 \quad (C_1)$.
Tương tự ta xét $|z+1-i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=1 \quad (C_2)$.
Do đó P là tổng chu vi hai đường tròn (C_1) và (C_2). Mà đường tròn (C_1) có bán kính $R_1=2$ và (C_2) có bán kính $R_2=1$ nên $P=2\pi\cdot R_1-2\pi\cdot R_2=2\pi\cdot 2-2\pi\cdot 1=2\pi$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z-3i+1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

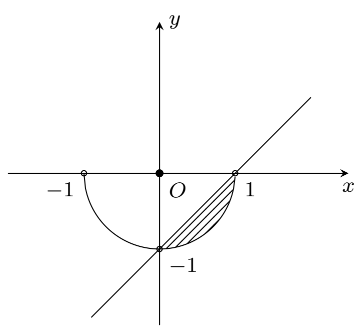
A. $S=25\pi$. **B.** $S=8\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Lời giải.
Giả sử số phức z có dạng $z=x+iy$, với $x,\, y \in \mathbb{R}$.
Khi đó $z-3i+1=x+iy-3i+1=(x+1)+(y-3)\,i$.
Do đó $|z-3i+1|=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$.
Xét $|z-3i+1|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=5 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25 \quad (C_1)$.
Tương tự ta xét $|z-3i+1|=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=3 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=9 \quad (C_2)$.
Do đó S là diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn (C_1) và (C_2). Mà đường tròn (C_1) có bán kính $R_1=5$ và (C_2) có bán kính $R_2=3$ nên $S=\pi\cdot R_1^2-\pi\cdot R_2^2=\pi\cdot 5^2-\pi\cdot 3^2=16\pi$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Gọi (H) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2 \leq 1 \leq x-y$. Tính diện tích hình H.

A. $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.
Do giả thiết số phức z có dạng $z=x+iy$, với $x,\, y \in \mathbb{R}$.
Khi đó ta xét $x^2+y^2=1 \quad (1)$ và phương trình $x-y=1 \Leftrightarrow y=x-1 \quad (2)$.
Thay (2) vào (1) ta có $x^2+(x-1)^2=1 \Leftrightarrow x^2+x^2-2x+1=1 \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$
Mặt khác $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$.
Do giả thiết suy ra hình H giới hạn bởi các đường $x=0$; $x=1$, $y=x-1$ và $y=-\sqrt{1-x^2}$.



Khi đó diện tích hình H bằng

$$\begin{aligned} S=\int\limits_0^1\left(x-1+\sqrt{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\left.x\right|_0^1+\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}+\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Xét $J=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $x=\sin t$, với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$.

Khi $x=0$ suy ra $t=0$; khi $x=1$ suy ra $t=\frac{\pi}{2}$.

Do đó $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t$.

Vì $\cos t\geq 0$ với mọi $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nên

$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t=\left.\frac{1}{2}t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{1}{4}\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Do đó $S=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án C □

DẠNG 2.3. Tập hợp điểm của số phức là elíp

Định nghĩa 1. Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2=2c>0$. Đường elíp là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1+MF_2=2a$ $(a>c)$. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là các tiểu điểm của elíp. Khoảng cách $2c$ được gọi là tiêu cự của elíp.

Phương trình chính tắc của elíp $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Các thông số cần nhớ:

!

- Trục lớn $A_1A_2=2a$.
- Trục bé $B_1B_2=2b$.
- Tiêu cự $F_1F_2=2c$.
- Mối liên hệ $a^2=b^2+c^2$.
- Bán kính qua tiêu của M là $MF_1=a+\frac{c}{a}x$, $MF_2=a-\frac{c}{a}x$.

Câu 49. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

A. $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+iy$, với x, $y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Khi đó $z-4=x+iy-4=(x-4)+yi$.

Do đó $|z-4|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$.

Tương tự, xét $z+4=x+iy+4=(x+4)+yi$.

Do đó $|z+4|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10\quad(*)$.

Đặt $F_1\left(-4;0\right)$ và $F_2\left(4;0\right)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 8$.
Nên tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2.
Do $MF_1 + MF_2 = 10$ suy ra $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.
Mặt khác $F_1F_2 = 8$ suy ra $2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$.
Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = 3$.
Vậy phương trình elíp $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 50. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z-2| + |z+2| = 10$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

A. $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. **B.** $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$. **C.** $(E): \dfrac{x^2}{21} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. **D.** $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải.
Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với x, $y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.
Khi đó $z - 2 = x + iy - 2 = (x-2) + yi$.
Do đó $|z-2| = \sqrt{\left(x-2\right)^2 + y^2}$.
Tương tự, xét $z + 2 = x + iy + 2 = (x+2) + yi$.
Do đó $|z+2| = \sqrt{\left(x+2\right)^2 + y^2}$.
Từ giả thiết suy ra $\sqrt{\left(x-2\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x+2\right)^2 + y^2} = 10 \quad (*)$.
Đặt $F_1\left(-2;0\right)$ và $F_2\left(2;0\right)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 4$.
Nên tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2.
Do $MF_1 + MF_2 = 10$ suy ra $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.
Mặt khác $F_1F_2 = 4$ suy ra $2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$.
Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 4 \Leftrightarrow b^2 = 21 \Leftrightarrow b = \sqrt{21}$.
Vậy phương trình elíp $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 51. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z-1| + |z+1| = 4$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

A. $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. **B.** $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. **C.** $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. **D.** $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

Lời giải.
Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với x, $y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.
Khi đó $z - 1 = x + iy - 1 = (x-1) + yi$.
Do đó $|z-1| = \sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2}$.
Tương tự, xét $z + 1 = x + iy + 1 = (x+1) + yi$.
Do đó $|z+1| = \sqrt{\left(x+1\right)^2 + y^2}$.
Từ giả thiết suy ra $\sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x+1\right)^2 + y^2} = 4 \quad (*)$.
Đặt $F_1\left(-1;0\right)$ và $F_2\left(1;1\right)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4 > F_1F_2 = 2$.
Nên tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2.
Do $MF_1 + MF_2 = 4$ suy ra $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$.
Mặt khác $F_1F_2 = 2$ suy ra $2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$.
Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$.
Vậy phương trình elíp $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 52. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $\left|z - \sqrt{2}\right| + \left|z + \sqrt{2}\right| = 8$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

A. $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{13} = 1$. **B.** $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{14} = 1$. **C.** $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. **D.** $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{15} = 1$.

Lời giải.
Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + iy$, với x, $y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.
Khi đó $z - \sqrt{2} = x + iy - \sqrt{2} = \left(x - \sqrt{2}\right) + yi$.
Do đó $\left|z - \sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2}$.
Tương tự, xét $z + \sqrt{2} = x + iy + \sqrt{2} = \left(x + \sqrt{2}\right) + yi$.

Do đó $\left|z+\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + y^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = 8 \quad (*)$.

Đặt $F_1\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{2};0\right)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 8 > F_1F_2 = 2\sqrt{2}$.

Nên tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là một elíp $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2.

Do $MF_1 + MF_2 = 8$ suy ra $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

Mặt khác $F_1F_2 = 2\sqrt{2}$ suy ra $2c = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 2 \Leftrightarrow b^2 = 14 \Leftrightarrow b = \sqrt{14}$.

Vậy phương trình elíp $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{14} = 1$.

Chọn đáp án B □

DẠNG 2.4. Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Sử dụng phương pháp lượng giác hóa

Đối với nhóm bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn thì việc lượng giác hóa tỏ ra khá hiệu quả và nhanh chóng.

Giả sử có được giả thiết $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{y-b}{R}\right)^2 = 1$, sẽ gợi ta đến công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên ta đặt $\begin{cases} \dfrac{x-a}{R} = \sin t \\ \dfrac{y-b}{R} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R\sin t + a \\ y = R\cos t + b \end{cases}$ để đưa bài toán về dạng lượng giác quen thuộc. Ngoài ra, ta cần nhớ những đánh giá thường được sử dụng

!

- $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos t \le 1$ và $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha)$.
- Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng 1: $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.
- $a\sin t + b\cos t \le \sqrt{(a^2+b^2)\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sin t}{a} = \dfrac{\cos t}{b} \\ a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$
- $a\sin t + b\cos t \ge -\sqrt{(a^2+b^2)\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = -\sqrt{a^2+b^2}$.

  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sin t}{a} = \dfrac{\cos t}{b} \\ a\sin t + b\cos t = -\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

BÀI 1. Cho số phức $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-2-3i| = 1$ và biểu thức $|\overline{z}+i+1|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $|3x-2y|$.

ĐS: $|3x-2y| = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

Lời giải.

Ta có $|z-2-3i| = 1 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-3)i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \quad (*)$

- **Cách giải 1. Sử dụng lượng giác hóa** Đặt $\begin{cases} x = sint + 2 \\ y = \cos t + 3 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} |\overline{z}+i+1| &= |x-yi+i+1| \\ &= |(x+1)+(1-y)\,i| \\ &= \sqrt{(x+1)^2+(1-y)^2} \\ &= \sqrt{((x-2)+3)^2+(-2-(y-3))^2} \\ &= \sqrt{(x-2)^2+6\,(x-2)+9+4+4\,(y-3)+(y-3)^2} \end{aligned}$$

Từ $(*)$ suy ra $|\overline{z}+i+1| = \sqrt{6x+4y-10}$.
Khi đó $\sqrt{6x+4y-10} = \sqrt{6\sin t+4\cos t+14}$.
Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

$$(6\sin t+4\cos t)^2 \le \left(6^2+4^2\right)\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)^2 \Leftrightarrow (6\sin t+4\cos t)^2 \le 52 \Leftrightarrow |6\sin t+4\cos t| \le 2\sqrt{13}$$

Suy ra $\sqrt{6x+4y-10} \le \sqrt{2\sqrt{13}+14}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{\sin t}{6} = \dfrac{\cos t}{4} \\ 6\sin t+4\cos t = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin t-3\cos t = 0 \\ 3\sin t+2\cos t = \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \dfrac{3\sqrt{13}}{13} \\ \cos t = \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

Do $\begin{cases} x = sint+2 \\ y = \cos t+3 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}+2 \\ y = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}+3 \end{cases}$.

Nên $|3x-2y| = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$.

— **Cách giải 2. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy - Schwarz**
Ta có

$$\begin{aligned} |\overline{z}+i+1| &= |x-yi+i+1| \\ &= |(x+1)+(1-y)\,i| \\ &= \sqrt{(x+1)^2+(1-y)^2} \\ &= \sqrt{((x-2)+3)^2+(-2-(y-3))^2} \\ &= \sqrt{(x-2)^2+6\,(x-2)+9+4+4\,(y-3)+(y-3)^2} \end{aligned}$$

Từ $(*)$ suy ra $|\overline{z}+i+1| = \sqrt{6x+4y-10} = \sqrt{6\,(x-2)+4\,(y-3)+14}$.
Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

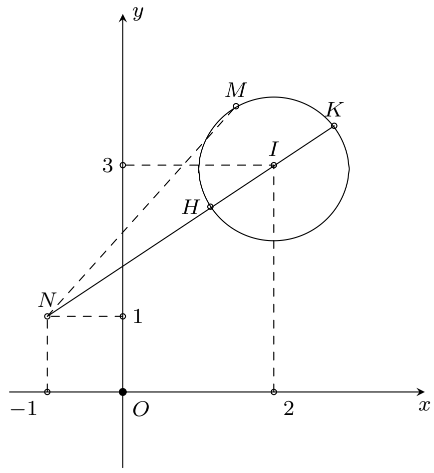
$$[6\,(x-2)+4\,(y-3)]^2 \le \left(6^2+4^2\right)\left[(x-2)^2+(y-3)^2\right] \Leftrightarrow |6\,(x-2)+4\,(y-3)| \le 2\sqrt{13}$$

Suy ra $\sqrt{6x+4y-10} \le \sqrt{2\sqrt{13}+14}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y-3}{4} \\ 6x+4y-24 = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = -5 \\ 3x+2y = 12+\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}+2 \\ y = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}+3 \end{cases}$$

Nên $|3x-2y| = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$.

— **Cách giải 3. Sử dụng hình học (hình chiếu và tương giao)**
Giải sử $M\,(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.
Từ $(*)$ suy ra tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn có phương trình $(C):\ (x-2)^2+(y-3)^2 = 1$.
Gọi I, R là tâm và bán kính đường tròn (C) ta có $I\,(2;3)$, $R = 1$.



Mặt khác

$$\begin{aligned}|\overline{z}+i+1| &= |x-yi+i+1|\\ &= |(x+1)+(1-y)\,i|\\ &= \sqrt{(x+1)^2+(1-y)^2}\\ &= \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\end{aligned}$$

Giả sử $N(-1;1)$ suy ra $MN=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.
Bài toán trở thành tìm vị trí điểm M trên đường tròn (C) sao cho độ dài MN đạt giá trị lớn nhất.
Gọi H, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng NI với đường tròn (C) như hình bên.
Dễ thấy $NH\le MN\le NK$ suy ra $\max MN=NK$ khi $M\equiv K$.
Mà phương trình đường thẳng đi qua hai điểm I, N là $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}\Leftrightarrow$ $2x-3y+5=0$.
Khi đó tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-3y+5=0\\(x-2)^2+(y-3)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x+5}{3}\\(x-2)^2+\left(\dfrac{2x+5}{3}-3\right)^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x+5}{3}\\9\,(x-2)^2+(2x-4)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x+5}{3}\\13x^2-52x+43=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x+5}{3}\\\left[\begin{array}{l}x=2+\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\\x=2-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2+\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\\y=3+\dfrac{2\sqrt{13}}{3}\end{cases}\\\begin{cases}x=2-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\\y=3-\dfrac{2\sqrt{13}}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

Suy ra tọa độ điểm $K\left(2+\dfrac{3\sqrt{13}}{13};3+\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right)$. Do đó $\begin{cases}x=2+\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\\y=3+\dfrac{2\sqrt{13}}{3}\end{cases}$ nên $|3x-2y|=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$.

□

Câu 53. (Đề tham khảo - Bộ Giáo dục và Đào tọa năm 2018 - Câu 46)
Xét các số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải.

Ta có $|z-4-3i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(a-4)+(b-3)\,i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-4)^2+(b-3)^2=5\quad(*)$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{5}\sin t+4\\b=\sqrt{5}\cos t+3\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}Q &= |z+1-3i|+|z-1+i|\\ &= \sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+5\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+3\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t+4\right)^2}\\ &= \sqrt{5\sin^2t+10\sqrt{5}\sin t+25+5\cos^2t}+\sqrt{5\sin^2t+6\sqrt{5}\sin t+9+5\cos^2t+8\sqrt{5}\cos t+16}\\ &= \sqrt{10\sqrt{5}\sin t+30}+\sqrt{6\sqrt{5}\sin t+8\sqrt{5}\cos t+30}\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{10\sqrt{5}\sin t+30}+\sqrt{6\sqrt{5}\sin t+8\sqrt{5}\cos t+30}\right)^2 &\le \left(1^2+1^2\right)\left(10\sqrt{5}\sin t+30+6\sqrt{5}\sin t+8\sqrt{5}\cos t+30\right)\\ &\le 2\left(16\sqrt{5}\sin t+8\sqrt{5}\cos t+60\right)\\ &\le 16\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)+120\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt{10\sqrt{5}\sin t+30}+\sqrt{6\sqrt{5}\sin t+8\sqrt{5}\cos t+30}\le\sqrt{16\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)+120}$$

Mà

$$(2\sin t+\cos t)^2\le\left(2^2+1^2\right)\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\Leftrightarrow(2\sin t+\cos t)^2\le 5\Leftrightarrow|2\sin t+\cos t|\le\sqrt{5}$$

Nên

$$\sqrt{16\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)+120}\le\sqrt{200}\Leftrightarrow\sqrt{16\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)+120}\le 10\sqrt{2}$$

Suy ra $Q\le 10\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\dfrac{\sin t}{2}=\dfrac{\cos t}{1}\\ 2\sin t+\cos t=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin t-2\cos t=0\\ 2\sin t+\cos t=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin t=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

Mà $\begin{cases}a=\sqrt{5}\sin t+4\\ b=\sqrt{5}\cos t+3\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}a=6\\ b=4\end{cases}$.

Nên $P=a+b=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,\, b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+6-8i|=2\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $Q=|z+6+2i|+|z-2-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải.

Ta có $|z+6-8i|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|(a+6)+(b-8)\,i|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(a+6)^2+(b-8)^2}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow(a+6)^2+(b-8)^2=20\quad(*)$

Đặt $\begin{cases}a=2\sqrt{5}\sin t-6\\ b=2\sqrt{5}\cos t+8\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}Q&=|z+6+2i|+|z-2-2i|\\ &=\sqrt{(a+6)^2+(b+2)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2}\\ &=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\sin t\right)^2+\left(2\sqrt{5}\cos t+10\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{5}\sin t-8\right)^2+\left(2\sqrt{5}\cos t+6\right)^2}\\ &=\sqrt{20\sin^2 t+20\cos^2 t+40\sqrt{5}\cos t+100}+\sqrt{20\sin^2 t-32\sqrt{5}\sin t+64+20\cos^2 t+24\sqrt{5}\cos t+36}\\ &=\sqrt{40\sqrt{5}\cos t+120}+\sqrt{-32\sqrt{5}\sin t+24\sqrt{5}\cos t+120}\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{40\sqrt{5}\cos t+120}+\sqrt{-32\sqrt{5}\sin t+24\sqrt{5}\cos t+120}\right)^2 &\le \left(1^2+1^2\right)\left(40\sqrt{5}\cos t+120-32\sqrt{5}\sin t+24\sqrt{5}\cos t+120\right)\\ &\le 2\left(64\sqrt{5}\cos t-32\sqrt{5}\sin t+240\right)\\ &\le 64\sqrt{5}\left(2\cos t-\sin t\right)+480\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt{40\sqrt{5}\cos t+120}+\sqrt{-32\sqrt{5}\sin t+24\sqrt{5}\cos t+120}\le\sqrt{64\sqrt{5}\left(2\cos t-\sin t\right)+480}$$

Mà

$$(2\cos t-\sin t)^2\le\left(2^2+(-1)^2\right)\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\Leftrightarrow(2\cos t-\sin t)^2\le 5\Leftrightarrow|2\cos t-\sin t|\le\sqrt{5}$$

Nên

$$\sqrt{64\sqrt{5}\left(2\cos t-\sin t\right)+480}\le\sqrt{800}\Leftrightarrow\sqrt{64\sqrt{5}\left(2\cos t-\sin t\right)+480}\le 20\sqrt{2}$$

Suy ra $Q \le 20\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{\cos t}{2} = \dfrac{\sin t}{-1} \\ 2\cos t - \sin t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin t + \cos t = 0 \\ 2\cos t - \sin t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \dfrac{-\sqrt{5}}{5} \\ \cos t = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} a = 2\sqrt{5}\sin t - 6 \\ b = 2\sqrt{5}\cos t + 8 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = -8 \\ b = 12 \end{cases}$.
Nên $P = a + b = 4$.
Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-1| + |z-i|$.

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.
Giả sử số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z-2} = \frac{a+bi-2i}{a+bi-2} &= \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} \\ &= \frac{[a+(b-2)i][(a-2)-bi]}{[(a-2)+bi][(a-2)-bi]} \\ &= \frac{a(a-2) - abi + b(b-2) + (b-2)(a-2)i}{(a-2)^2 + b^2} \\ &= \frac{a(a-2)+b(b-2)}{(a-2)^2+b^2} + \left(\frac{(b-2)(a-2)-ab}{(a-2)^2+b^2}\right)i \end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $a(a-2) + b(b-2) = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2 \quad (*)$
Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin t + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos t + 1 \end{cases}$
Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z-1| + |z-i| \\ &= \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2 + \left(\sqrt{2}\cos t + 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}\sin t + 1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\cos t\right)^2} \\ &= \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\sqrt{2}\cos t + 1} + \sqrt{2\sin^2 t + 2\sqrt{2}\sin t + 1 + 2\cos^2 t} \\ &= \sqrt{2\sqrt{2}\cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2}\sin t + 3} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2\sqrt{2}\cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2}\sin t + 3}\right)^2 &\le \left(1^2 + 1^2\right)\left(2\sqrt{2}\cos t + 3 + 2\sqrt{2}\sin t + 3\right) \\ &\le 2\left(2\sqrt{2}\cos t + 2\sqrt{2}\sin t + 6\right) \\ &\le 4\sqrt{2}\left(\cos t + \sin t\right) + 12 = 8\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 12 \end{aligned}$$

Do $-1 \le \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$ ta suy ra

$$\left(\sqrt{2\sqrt{2}\cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2}\sin t + 3}\right)^2 \le 20 \Rightarrow \sqrt{2\sqrt{2}\cos t + 3} + \sqrt{2\sqrt{2}\sin t + 3} \le 2\sqrt{5}$$

Do đó $P \le 2\sqrt{5}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}\cos t + 3}}{1} = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}\sin t + 3}}{1} \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \cos t \\ \cos t + \sin t = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin t + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos t + 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.
Nên $\max P = 2\sqrt{5}$.
Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{314}$. **B.** $|w| = 2\sqrt{309}$. **C.** $|w| = \sqrt{1258}$. **D.** $|w| = 3\sqrt{137}$.

Lời giải.
Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-4) + (b-3)\,i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \quad (*)$
Khi đó

$$\begin{aligned} P &= |z+2|^2 - |z-i|^2 \\ &= (a+2)^2 + b^2 - a^2 - (b-1)^2 \\ &= a^2 + 4a + 4 + b^2 - a^2 - b^2 + 2b - 1 \\ &= 4a + 2b + 3 \\ &= 2\left[2(a-4) + (b-3)\right] + 25 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

$$\begin{aligned} \left[2(a-4) + (b-3)\right]^2 &\le \left(2^2 + 1^2\right)\left[(a-4)^2 + (b-3)^2\right] \\ &\Leftrightarrow \left[2(a-4) + (b-3)\right]^2 \le 25 \\ &\Leftrightarrow \left|2(a-4) + (b-3)\right| \le 5 \end{aligned}$$

Nên

$$15 \le 2\left[2(a-4) + (b-3)\right] + 25 \le 35$$

Suy ra $\max P = 35$ và $\min P = 15$ hay $M = 35$; $m = 15$.
Khi đó $|w| = \sqrt{15^2 + 35^2} = 5\sqrt{58}$. □

Câu 57. Xét số phức $z = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và biểu thức $\left|z - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của biểu thức $P = |a+b|$.

A. $P = 6$. **B.** $P = 3\sqrt{2}$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = \sqrt{2}$.

Lời giải.
Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có

$$\begin{aligned} & |z-2|^2 + |z+2|^2 = 26 \\ \Leftrightarrow\ & (a-2)^2 + b^2 + (a+2)^2 + b^2 = 26 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - 4a + 4 + b^2 + a^2 + 4a + 4 + b^2 = 26 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 = 9 \quad (*) \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \left|z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right| &= \left|\left(a - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(b - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i\right| \\ &= \sqrt{\left(a - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 3\sqrt{2}a + \frac{9}{2} + b^2 - 3\sqrt{2}b + \frac{9}{2}} \end{aligned}$$

Do $(*)$ nên $\left|z - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{18 - 3\sqrt{2}\,(a+b)}$.
Ta có

$$(a+b)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right) \Leftrightarrow (a+b)^2 \le 18 \Leftrightarrow |a+b| \le 3\sqrt{2}$$

Nên

$$0 \leq 18 - 3\sqrt{2}(a+b) \leq 36 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{18 - 3\sqrt{2}(a+b)} \leq 6$$

Suy ra $\max\left|z - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\right| = 6$ khi đó $|a+b| = 3\sqrt{2}$. □

Câu 58. Xét số phức $z = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và môđun của z đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 1 + 2\sqrt{2}$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 1 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử số phức $z = a + bi$ với $a,\, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{z-2i}{z-2} = \frac{a+bi-2i}{a+bi-2} &= \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} \\
&= \frac{[a+(b-2)i]\,[(a-2)-bi]}{[(a-2)+bi]\,[(a-2)-bi]} \\
&= \frac{a(a-2) - abi + b(b-2) + (b-2)(a-2)i}{(a-2)^2 + b^2} \\
&= \frac{a(a-2)+b(b-2)}{(a-2)^2+b^2} + \left(\frac{(b-2)(a-2)-ab}{(a-2)^2+b^2}\right)i
\end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $a(a-2) + b(b-2) = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin t + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos t + 1 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{a^2+b^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{2}\sin t + 1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\cos t + 1\right)^2} \\
&= \sqrt{2\sin^2 t + 2\sqrt{2}\sin t + 1 + 2\cos^2 t + 2\sqrt{2}\cos t + 1} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2}(\cos t + \sin t) + 4} \\
&= \sqrt{4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4}
\end{aligned}$$

Do $-1 \leq \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ ta suy ra $\sqrt{4\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 4} \leq 4\sqrt{2}$.

Do đó $|z| \leq 4\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin t + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos t + 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right) + 1 \\ b = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Nên $\max|z| = 4\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Do đó $P = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Xét số phức $z = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2i|$.

A. $3 + \sqrt{17}$. **B.** $3 - \sqrt{17}$. **C.** $1 + 5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Ta có $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |(a-1) + (b+2)i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+2)^2 = 9 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} a = 3\sin t + 1 \\ b = 3\cos t - 2 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z-2i| = \sqrt{a^2+(b-2)^2} \\ &= \sqrt{(3\sin t+1)^2+(3\cos t-4)^2} \\ &= \sqrt{9\sin^2 t+6\sin t+1+9\cos^2 t-24\cos t+16} \\ &= \sqrt{6(\sin t-4\cos t)+26} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwar ta có

$$\begin{aligned} & (\sin t-4\cos t)^2 \le \left(1^2+(-4)^2\right)\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right) \\ \Leftrightarrow\ & (\sin t-4\cos t)^2 \le 17 \\ \Leftrightarrow\ & |\sin t-4\cos t| \le \sqrt{17} \end{aligned}$$

Nên $\sqrt{6(\sin t-4\cos t)+26} \le \sqrt{6\sqrt{17}+26}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{\cos t}{-4} = \dfrac{\sin t}{1} \\ \sin t-4\cos t = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t-4\sin t = 0 \\ \sin t-4\cos t = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = -\dfrac{\sqrt{17}}{15} \\ \cos t = -\dfrac{4\sqrt{17}}{15} \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} a = 3\sin t+1 \\ b = 3\cos t-2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = -\dfrac{3\sqrt{17}}{15}+1 \\ b = -\dfrac{12\sqrt{17}}{15}-2 \end{cases}$.

Vậy $\max P = \sqrt{26+6\sqrt{17}}$.
Chọn đáp án D □

C. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.5. Sử dụng bình phương vô hướng

Đối với một số bài toán tìm max, min *việc sử dụng bình phương vô hướng để tìm điểm rơi nhằm áp dụng bất đẳng thức* $ax+by \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ *hoặc* $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) \le |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$ *tỏ ra khá hiệu quả. Ta cần nhớ bình phương vô hướng* $|\vec{u}\pm\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2z_2| = 5$ và $|3z_1-z_2| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1|+|z_2|$. **ĐS:** $P_{\max} = \sqrt{\dfrac{155}{14}}$.

Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1 và z_2.
Suy ra $|\vec{u}| = |z_1+2z_2| = |\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}| = 5$ và $|\vec{v}| = |3z_1-z_2| = |3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}| = 3$.
Phân tích. Bài toán trở thành tìm M, N để $P = |\overrightarrow{OM}|+|\overrightarrow{ON}|$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn $|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}| = 5$ và $|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}| = 3$. Để tìm $P_{\max}$ ta sử dụng bất đẳng thức $ax+by \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.
Tức tìm $P = |\overrightarrow{OM}|+|\overrightarrow{ON}| = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\left(\alpha\left|\overrightarrow{OM}\right|\right)+\dfrac{1}{\beta}\cdot\left(\beta\left|\overrightarrow{ON}\right|\right)$ hay

$$P = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\alpha\left|\overrightarrow{OM}\right|\right)+\frac{1}{\beta}\cdot\left(\beta\left|\overrightarrow{ON}\right|\right) \le \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\alpha^2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\beta^2\left|\overrightarrow{ON}\right|^2\right)}.$$

Do đó cần phải tìm tổng bình phương vô hướng $\alpha^2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\beta^2\left|\overrightarrow{ON}\right|^2 = \text{const}$, đó là chìa khóa.

Ta có

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\right|=5 \\ \left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right|^2+4\left|\overrightarrow{ON}\right|^2+4\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=25 \\ 9\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{ON}\right|^2-6\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+12\left|\overrightarrow{ON}\right|^2+12\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=75 \\ 18\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+2\left|\overrightarrow{ON}\right|^2-12\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=18 \end{cases} \Rightarrow 21\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+14\left|\overrightarrow{ON}\right|^2=93.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} P &= \left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{ON}\right|=\frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\left(\sqrt{21}\cdot\left|\overrightarrow{OM}\right|\right)+\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\left(\sqrt{14}\left|\cdot\overrightarrow{ON}\right|\right) \\ &\le \sqrt{\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{14}\right)\left(21\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+14\left|\overrightarrow{ON}\right|^2\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{14}\right)\cdot 93}=\sqrt{\frac{155}{14}}\Rightarrow P_{\max}=\sqrt{\frac{155}{14}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 21OM=14ON \\ OM+ON=\sqrt{\dfrac{155}{14}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ON=\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{155}{14}} \\ OM=\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{155}{14}}. \end{cases}$ □

VÍ DỤ 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$ và biểu thức $P=3|z|+2|z-4-4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm mô-đun của số phức z.

A. $|z|=\sqrt{2}-1$. **B.** $|z|=4$. **C.** $|z|=2$. **D.** $|z|=\sqrt{2}+1$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Có $|z-1-i|=1\Leftrightarrow|(x-1)+(y-1)i|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=1$. Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=1$.

Ta có $P=3|z|+2|z-4-4i|=3\sqrt{x^2+y^2}+2\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$.

Xét $O(0;0)$, $N(4;4)$ thì $P=3OM+2NM=3\left|\overrightarrow{OM}\right|+2\left|\overrightarrow{NM}\right|$.

Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=\left|\overrightarrow{OI}\right|^2+\left|\overrightarrow{IM}\right|^2+2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IM}=3+2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IM} \\ \left|\overrightarrow{NM}\right|=\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=\left|\overrightarrow{NI}\right|^2+\left|\overrightarrow{IM}\right|^2+2\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{IM}=19+2\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{IM} \end{cases}$

Nhận thấy rằng $\begin{cases} \overrightarrow{OI}=(1;1) \\ \overrightarrow{IN}=(3;3)=3(1;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Suy ra $3\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{NM}\right|^2=28+2\overrightarrow{IM}\cdot\left(3\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{NI}\right)=28\Rightarrow 3\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{NM}\right|^2=28$.

Khi đó $P=3\left|\overrightarrow{OM}\right|+2\left|\overrightarrow{NM}\right|=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\left|\overrightarrow{OM}\right|\right)+2\cdot\left|\overrightarrow{NM}\right|\le\sqrt{(3+4)\left(3\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{NM}\right|^2\right)}=14$.

Vậy $P_{\max}=14$ đạt được khi $\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{NM}\right| \\ 3\left|\overrightarrow{OM}\right|+2\left|\overrightarrow{NM}\right|=14 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|=2=|z|$.

Chọn đáp án C □

2. Bài tập áp dụng

Câu 60. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tính giá trị lớn nhất của $P=|z+1|+3|z-1|$.

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $3\sqrt{10}$. **D.** $4\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $O(0;0)$.

Khi đó $|z|=1\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=1$ và $P=|z+1|+3|z-1|=\left|\overrightarrow{AM}\right|+3\left|\overrightarrow{BM}\right|$.

Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)^2=\left|\overrightarrow{AO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+2\cdot\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM}=2+2\cdot\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM} \\ \left|\overrightarrow{BM}\right|^2=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)^2=\left|\overrightarrow{BO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+2\cdot\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OM}=2+2\cdot\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OM}. \end{cases}$

Dễ thấy $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2=4+2\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\right)=4$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$P=\left|\overrightarrow{AM}\right|+3\left|\overrightarrow{BM}\right|\le\sqrt{(1^2+3^2)\left(\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2\right)}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}AM=\dfrac{1}{3}BM\\ AM+BM=2\sqrt{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}BM=\dfrac{2}{3}\sqrt{10}\\ AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=2$ và biểu thức $P=|z|+|z-3-6i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|\overline{z}|$.

A. $|\overline{z}|=1+\sqrt{7}$. **B.** $|\overline{z}|=\sqrt{7}$. **C.** $|\overline{z}|=2\sqrt{7}$. **D.** $|\overline{z}|=2+\sqrt{7}$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $I(1;2)$, $O(0;0)$, $A(3;6)$.

Khi đó $|z-1-2i|=2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=2$ và $P=|z|+|z-3-6i|=\left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{AM}\right|$.

Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=\left|\overrightarrow{OI}\right|^2+\left|\overrightarrow{IM}\right|^2+2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IM}=9+2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IM}\\ \left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=\left|\overrightarrow{AI}\right|^2+\left|\overrightarrow{IM}\right|^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM}=24+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM}.\end{cases}$

Mặt khác $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=(-2;-4)\\ \overrightarrow{OI}=(1;2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{OI}=\vec{0}$.

Suy ra $2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=42$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$P=\left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{AM}\right|\le\sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{AM}\right|^2\right)}=3\sqrt{7}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|\\ \left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{AM}\right|=3\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{7}\Rightarrow|z|=\sqrt{7}\Rightarrow|\overline{z}|=\sqrt{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{26}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 và $O(0;0)$.

Ta có $z_1+z_2=8+6i\Rightarrow|z_1+z_2|=10$.

Khi đó $|z_1-z_2|=2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=2$; $|z_1+z_2|=10\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right|=10$ và $P=\left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{ON}\right|$.

Suy ra $\begin{cases}\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|^2=4\\ \left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right|^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{ON}\right|^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=4\\ \left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{ON}\right|^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=100\end{cases}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{ON}\right|^2=52.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$P=\left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{ON}\right|\le\sqrt{(1+1)\left(\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{ON}\right|^2\right)}=2\sqrt{26}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{26}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Tìm $|z|_{\min}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $A(0;-1)$, $B(0;1)$.

Suy ra $4|z+i|+3|z-i|=10\Leftrightarrow4\left|\overrightarrow{AM}\right|+3\left|\overrightarrow{BM}\right|=10$; $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|$.

Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\right)^2=OA^2+AM^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}\\ \left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}\right)^2=OB^2+BM^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BM}.\end{cases}$

Dễ thấy $\overrightarrow{OA}=(0;-1)$, $\overrightarrow{OB}=(0;-1)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$ và $OA^2=OB^2=1$.
Suy ra

$$\begin{aligned}2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 &= OA^2+OB^2+AM^2+BM^2+2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BM}\right)\\ &= 2+AM^2+BM^2+2\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}\right)\\ &= 2+AM^2+BM^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=AM^2+BM^2-2.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$4\left|\overrightarrow{AM}\right|+3\left|\overrightarrow{BM}\right|\le\sqrt{(3^2+4^2)\left(AM^2+BM^2\right)}\Leftrightarrow 10\le\sqrt{25\left(AM^2+BM^2\right)}\Rightarrow AM^2+BM^2\ge 4.$$

Vậy $2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=AM^2+BM^2-2\ge 4-2=2\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|\ge 1\Rightarrow |z|_{\min}=1$.
Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.
Suy ra $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.
Khi đó $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3=2\left[2(x-3)+(y-4)\right]+23$.
Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned}&2(x-3)+(y-4)\le\sqrt{(2^2+1^2)\left[(x-3)^2+(y-4)^2\right]}=5\\ \Rightarrow\ & P_{\max}=2\cdot 5+23=33.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=y-4\\ 2(x-3)+(y-4)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=5.\end{cases}$

Khi đó $|z+i|=\sqrt{61}$.
Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $x+y$ biết rằng biểu thức $P=|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.
Khi đó $|z-4-3i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-4)^2+(y-3)^2=5$ và $P=|z+1-3i|+|z-1+i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$.
Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\\ &\le\sqrt{2\left[(x+1)^2+(y-3)^2+(x-1)^2+(y+1)^2\right]}=\sqrt{2\left[2(x^2+y^2)-4y+12\right]}\end{aligned}$$

Mặt khác $(x-4)^2+(y-3)^2=5\Leftrightarrow x^2+y^2=8x+6y-20$.
Suy ra $P\le\sqrt{2\left(16x+8y-28\right)}=2\sqrt{8x+4y-14}$.
Lại có $8x+4y-14=8(x-4)+4(y-3)+30\le\sqrt{(8^2+4^2)\left[(x-4)^2+(y-3)^2\right]}+30=20+30=50$.
Do đó $P\le 2\sqrt{50}=10\sqrt{2}\Rightarrow P_{\max}=10\sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y-3}{4}\\ 8(x-4)+4(y-3)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases}\Rightarrow x+y=10.$

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$ và biểu thức $P=|z-1|+|z-1-7i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính mô-đun của số phức $w=z-1+i\sqrt{3}$.

A. $|w|=2\sqrt{2}$. **B.** $|w|=2\sqrt{3}$. **C.** $|w|=4\sqrt{3}$. **D.** $|w|=3\sqrt{2}$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $A(1;0)$, $B(1;7)$.
Khi đó $|z|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$ và $P=|z-1|+|z-1-7i|=\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{BM}\right|\ge\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
Suy ra $P_{\min}=AB=7$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm AB: $\begin{cases}x=1\\ y=7t\end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$.

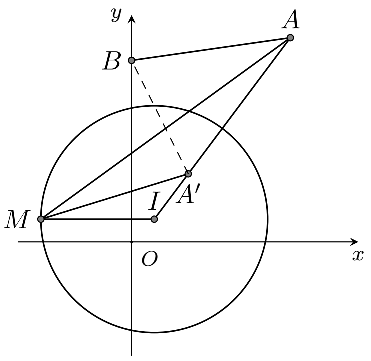
Mà $x^2+y^2=4 \Rightarrow t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{7} \Rightarrow M_1\left(1;\sqrt{3}\right)$ hoặc $M_2\left(1;-\sqrt{3}\right)$.
Dễ thấy điểm $AM_1+BM_1<AM_2+BM_2 \Rightarrow M_1\equiv M \Rightarrow z=1+i\sqrt{3} \Rightarrow w=2\sqrt{3}i \Rightarrow |w|=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$ và biểu thức $P=|z-7-9i|+2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $|z|$.

A. $\sqrt{37}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Lời giải.



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $I(1;1)$, $A(7;9)$, $B(0;8)$.
Khi đó $|z-1-i|=5 \Leftrightarrow MI=5 \Rightarrow$ tập hợp điểm M nằm trên đường tròn (C) có tâm I bán kính $R=5$ và $P=AM+2BM$.
Có $IA=10$ và các điểm A, B đều nằm ngoài đường tròn (C).
Lấy A' trên đoạn IA sao cho $AI'\cdot IA=R^2 \Rightarrow \overrightarrow{IA'}=\dfrac{R^2}{IA^2}\cdot\overrightarrow{IA} \Rightarrow A'\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.
Suy ra $MA=2MA' \Rightarrow P=2(MA'+BM)\geq 2A'B \Rightarrow P_{\min}=2A'B=5\sqrt{5}$.
Khi đó M là giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng $A'B$: $\begin{cases} x=-t \\ y=8+2t \end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$.

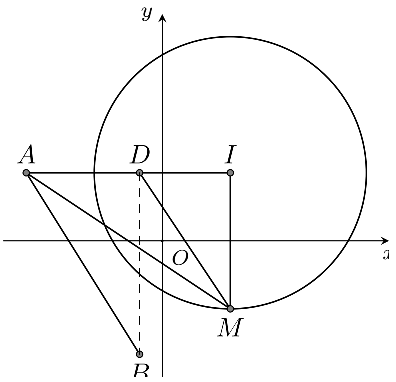
Thay vào (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow M(1;6) \\ t=-5 \Rightarrow M(5;-2). \end{array}\right.$
Dễ thấy $M(1;6)$ thì $P_{\min}=MA+2MB \Rightarrow |z|=\sqrt{37}$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z-3-3i|=6$. Tính $x+y$ biết rằng biểu thức $P=2|z+6-3i|+3|z+1+5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2+2\sqrt{5}$. **B.** $1-\sqrt{5}$. **C.** $2-2\sqrt{5}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

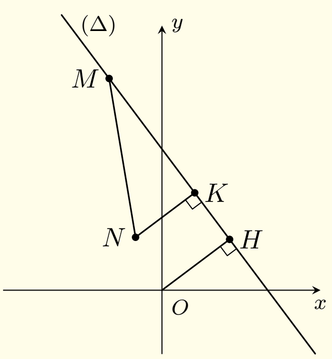
Lời giải.



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $A(-6;3)$, $B(-1;-5)$.
Khi đó từ $|z-3-3i|=6$ suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;3)$ bán kính $R=6$. Dễ thấy $IA=9=\dfrac{3}{2}\cdot R$.
Gọi $C=IA\cap(C)$ và D thỏa mãn $\overrightarrow{ID}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{IC} \Rightarrow D(-1;3)$.
Suy ra $ID\cdot IA=\dfrac{2}{3}R\cdot\dfrac{3}{2}R=R^2$.
Suy ra $\triangle IMD \backsim \triangle IAM \Rightarrow \dfrac{AM}{MD}=\dfrac{IA}{IM}=\dfrac{3}{2}$ hay $2MA=3MD$.
Lại có $P=2MA+3MB=3(MD+MB)\geq 3DB$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$ ngược hướng suy ra $M(-1;3-2\sqrt{5})$.
Vậy $x+y=2-2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

DẠNG 2.6. Sử dụng hình chiếu và tương giao



Cho đường thẳng (Δ): $ax+by+c=0$ và điểm $M\in(\Delta)$. Điểm $N\notin(\Delta)$ thì NM nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv K$ với K là hình chiếu của N trên (Δ).

— $\min|z|=OH=\mathrm{d}_{[O,(\Delta)]}=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Khi đó $M\equiv H$ và $H=(\Delta)\cap OH$.

— $\min|z-(x_N+y_Ni)|=NK=\mathrm{d}_{N,(\Delta)}=\dfrac{|ax_N+by_N+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Khi đó $M\equiv K$ và $K=(\Delta)\cap NK$.

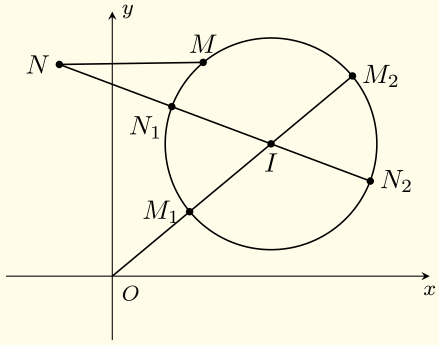
Cho tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(a;b)$ và bán kính R. Gọi N là điểm biểu diễn số phức z'. Khi đó

— $\begin{cases} \min|z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| \\ \max|z| = \max OM = OM_2 = OI + R. \end{cases}$

Khi đó $OI \cap (\mathscr{C}) = \{M_1; M_2\}$.

— $\begin{cases} \min|z - z'| = \min MN = NN_1 = |NI - R| \\ \max|z - z'| = \max MN = NN_2 = NI + R. \end{cases}$

Khi đó $NI \cap (\mathscr{C}) = \{N_1; N_2\}$.



1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Xét các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $P = 3x - 2y$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có

$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(x-2) + (y-4)i| = |x + (y-2)i|$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(d)\colon x + y - 4 = 0$.

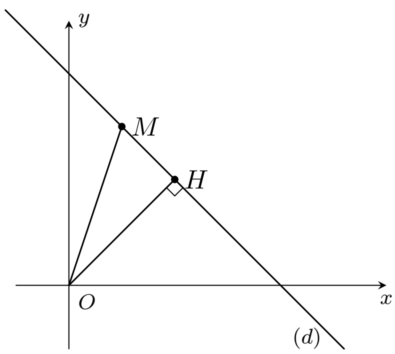
$\min|z| = \min OM = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên (d).

Vì $OH \perp d\colon x + y - 4 = 0 \Rightarrow OH\colon x - y + m = 0$.

Do $O(0;0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH\colon x - y = 0$.

Tọa độ điểm $H = (d) \cap OH$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow P = 3x - 2y = 2$.



! Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng $A^2 \geq 0$, bất đẳng thức cộng mẫu để tìm $\min|z|$.

Chọn đáp án (A) □

VÍ DỤ 2. Cho các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

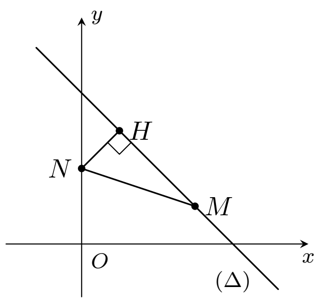
$|z + 2 - 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow |(x+2) + (y-2)i| = |x + (y-4)i| \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$.

Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(\Delta)\colon x + y - 2 = 0$.

Ta lại có $|iz + 1| = |(i(x + yi) + 1)| = |(1 - y) + xi| = \sqrt{(x^2) + (y-1)^2} = MN$ với $N(0;1)$.

Bài toán trở thành tìm điểm $M \in (\Delta)\colon x + y - 2 = 0$ thỏa mãn MN nhỏ nhất.

$\min|iz + 1| = \min MN = \mathrm{d}_{[N;(\Delta)]} = \dfrac{|x_N + y_N - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



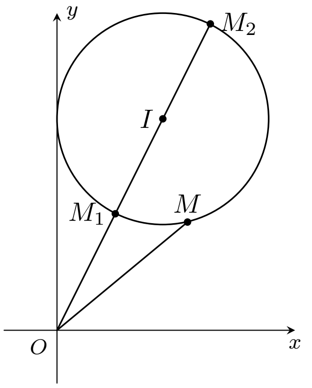
! Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng $A^2 \geq 0$, bất đẳng thức cộng mẫu để tìm $\min|z|$.

Chọn đáp án (C) □

VÍ DỤ 3. Cho các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai số phức có mô-đun lớn nhất và mô-đun nhỏ nhất. Tính tổng phần ảo của hai số phức z_1, z_2 đó.

A. -4. **B.** 4. **C.** -8. **D.** 8.

Lời giải.



$|z - (2 + 4i)| = 2 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$.
Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn $\mathscr{C}$ có tâm $I(2; 4)$ và bán kính $R = 2$.
Ta lại có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$.
Bài toán trở thành tìm $M \in \mathscr{C}$: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ thỏa mãn OM nhỏ nhất và OM lớn nhất.

Theo hình vẽ có $\begin{cases} \min |z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| \\ \max |z| = \max OM = OM_2 = OI + R \end{cases}$.

Lúc này tọa độ biểu diễn số phức z_1, z_2 là hai điểm M_1, M_2 là giao của OI với $(\mathscr{C})$.
Phương trình đường thẳng OI đi qua điểm $O(0; 0)$, có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{OI} = (2; 4)$ là $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} \Leftrightarrow y = 2x$.
Vậy tọa độ của M_1, M_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}; 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}; 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right).$$

Suy ra $z_1 = 2 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5} + \left(4 + \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)i$, $z_2 = 2 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5} + \left(4 - \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)i$.

Do đó tổng hai phần ảo của số phức z_1, z_2 là $\left(4 + \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right) + \left(4 - \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right) = 8$.

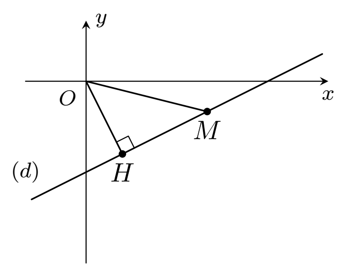
Chọn đáp án D □

2. Bài tập áp dụng

Câu 69. Xét các số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - i| = |\overline{z} - 2 - 3i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x - y$.

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.



$$\begin{aligned} |z - i| = |\overline{z} - 2 - 3i| &\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) - (y + 3)i| \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow -2y + 1 = -4x + 4 + 6y + 9 \\ &\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(d)\colon x - 2y - 3 = 0$.
$\min |z| = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên (d).
Vì $OH \perp d\colon x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow OH\colon 2x + y + m = 0$.
Do $O(0; 0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH\colon 2x + y = 0$.

Tọa độ điểm $H = (d) \cap OH$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow P = 3x - y = 3$.

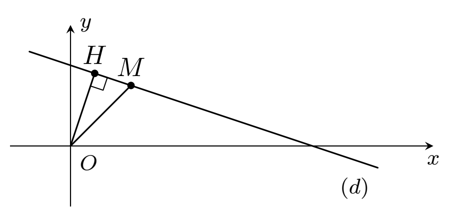
Chọn đáp án A □

Câu 70. Xét các số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z + 1 - 5i}{\overline{z} + 3 - i}\right| = 1$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x + y$.

A. $T = \dfrac{5}{12}$. **B.** $T = -\dfrac{12}{5}$. **C.** $T = \dfrac{12}{5}$. **D.** $T = -\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \left|\frac{z + 1 - 5i}{\overline{z} + 3 - i}\right| = 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{x + 1 + (y - 5)i}{x + 3 - (y + 1)i}\right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |x + 1 + (y - 5)i| = |(x + 3) - (y + 1)i| \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 - 10y + 25 = 6x + 9 + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0. \end{aligned}$$



Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(d)\colon x + 3y - 4 = 0$.
$\min|z| = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên (d).
Vì $OH \perp d\colon x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow OH\colon 3x - y + m = 0$.

Do $O(0;0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH\colon 3x - y = 0$.Tọa độ điểm $H = (d) \cap OH$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases}$.

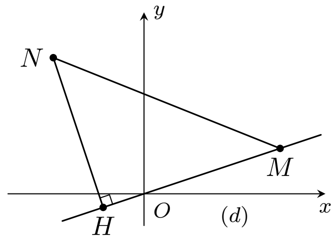
$\Rightarrow T = 3x + y = 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho các số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 2 - 3i|$.

A. $\dfrac{11}{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{121}{10}$.

Lời giải.

$|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 2)i| = |(x - 2) + (y + 1)i| \Leftrightarrow x - 3y = 0$.
Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(d)\colon x - 3y = 0$.
Ta lại có $|z + 2 - 3i| = |(x + 2) + (y - 3)i| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = MN$ với $N(-2;3)$.
Vậy $\min|z + 2 - 3i| = \min MN = \mathrm{d}_{[N,(d)]} = \dfrac{|-2 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{10}} = \dfrac{11\sqrt{10}}{10}$.

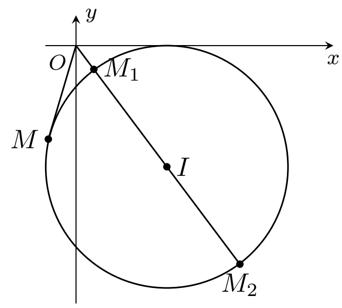


Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z|$.

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải.
$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$.
Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường tròn $\mathscr{C}$ có tâm $I(3;-4)$, bán kính $R = 4$.
Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$.
Theo hình vẽ có $\begin{cases} \min|z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| = 5 - 4 = 1 \\ \max|z| = \max OM = OM_2 = OI + R = 5 + 4 = 9 \end{cases}$.
Vậy tổng cần tìm là $9 + 1 = 10$.



Chọn đáp án D □

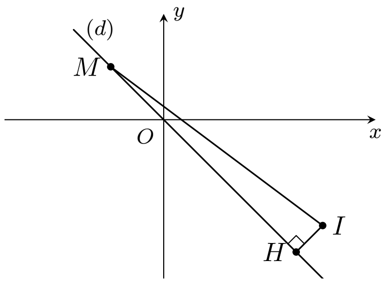
3. Bài tập rèn luyện

Câu 73. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - i| = |z + 1|$ và biểu thức $P = |z - (3 - 2i)|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $T = |x - y|$.

A. $T = 1$. **B.** $T = 3$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = 7$.

Lời giải.
$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x + 1) + yi| \Leftrightarrow x + y = 0$.
Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường thẳng $(d)\colon x + y = 0$.
Ta có $|z - (3 - 2i)| = |(x - 3) + (y + 2)i| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = MI$ với $I(3;-2)$.
Vậy $P = MI$ nhỏ nhất khi M trùng với H là hình chiếu của I trên (d).
Vì $IH \perp (d)\colon x + y = 0 \Rightarrow IH\colon x - y + m = 0$.
Do $I(3;-2) \in IH \Rightarrow m = -5 \Rightarrow IH\colon x - y - 5 = 0$.

Khi đó tọa độ của H thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow T = |x - y| = 5$.



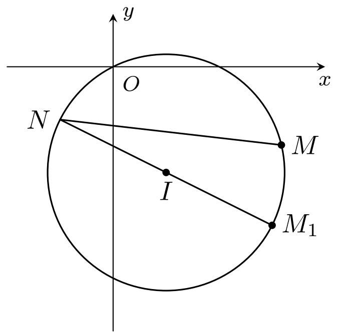
Chọn đáp án C □

Câu 74. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm $Q = |x - 2y|$.

A. $Q = 3$. **B.** $Q = 5$. **C.** $Q = 7$. **D.** $Q = 9$.

Lời giải.

$|z-1+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$.
Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.
Ta có $P=|z+1+i|=|(x+1)+(y+1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=MN$ với $N(-1;-1)$.
Dễ thấy $N\in(\mathscr{C})$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_1$ là điểm đối xứng với N qua I.
Suy ra $\begin{cases} x=2x_I-x_N=2\cdot1+1=3\\ y=2y_I-y_N=2\cdot(-2)+1=-3\end{cases} \Rightarrow Q=|x-2y|=9.$



Chọn đáp án (D) □

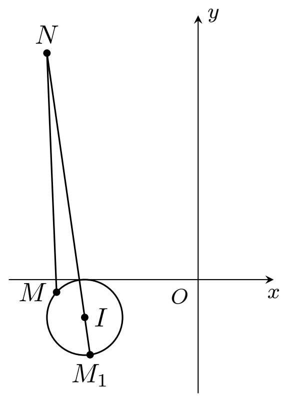
Câu 75. Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|2iz-1+3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2-3i|$.

A. $\dfrac{-1+5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+5\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{-1+2\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+2\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}|2iz-1+3i|=1 &\Leftrightarrow |2i(x+yi)-1+3i|=1\\ &\Leftrightarrow |(-2y-1)+(2x+3)i|=1\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{1}{2}$.
Ta có $|z+2-3i|=|(x+2)+(y-3)i|=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=MN$ với $N(-2;3)$.
Vậy $\max P=\max MN=NM_1=NI+R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+5\sqrt{2}}{2}$.

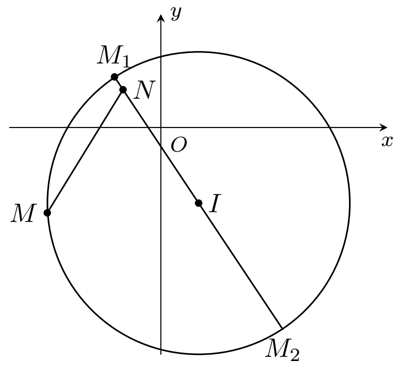


Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1+2i|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$. Tìm $M+m$.

A. 4. **B.** 8. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

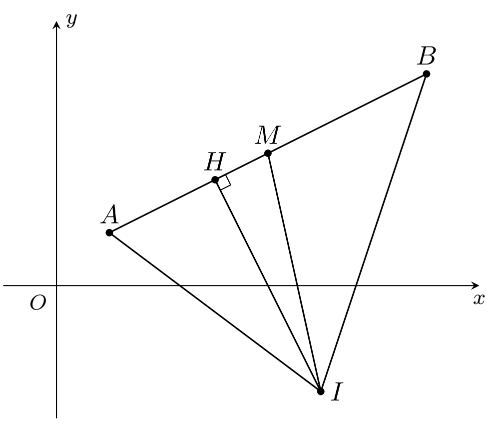
Lời giải.
$|z-1+2i|=4 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=16$.
Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=4$.
Ta có $|z+1-i|=|(x+1)+(y-1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=MN$ với $N(-1;1)$.
Theo hình vẽ có
$\begin{cases} m=\min P=\min MN=NM_1=|NI-R|=|\sqrt{13}-4|=4-\sqrt{13}\\ M=\max P=\max MN=NM_2=|NI+R|=\sqrt{13}+4.\end{cases}$
Vậy $M+m=8$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1-i|+|z-7-4i|=3\sqrt{5}$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-5+2i|$. Tìm $a+b$.

Lời giải.
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Trong mặt phẳng tọa độ xét các điểm $A(1;1)$, $B(7;4)$ và $I(5;-2)$.
Ta có $|z-1-i|+|z-7-4i|=3\sqrt{5} \Leftrightarrow MA+MB=3\sqrt{5}=AB$.
Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đoạn thẳng AB.
Ta lại có $|z-5+2i|=IM$. Theo hình vẽ, ta có $IM\ge IH$ và $IM\le IB$.
Phương trình đường thẳng AB đi qua $A(1;1)$, có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(6;3)$ là $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{3}$ hay $x-2y+1=0$.
Ta có $\begin{cases} \min|z-5+2i|=IH=\dfrac{|5-2\cdot(-2)+1|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\\ \max|z-5+2i|=IB=\sqrt{(7-5)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}\end{cases}.$
Vậy $a+b=2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$.



□

Câu 78. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+5|=5$ và $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1 và z_2.

Ta có $|z_1+5|=5 \Leftrightarrow |(x_M+5)+y_Mi|=5 \Leftrightarrow (x_M+5)^2+y_M^2=25$.

Vậy M nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm $I(-5;0)$ và bán kính $R=5$.

Ta lại có

$|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$

$\Leftrightarrow |(x_N+1)+(y_N-3)i|=|(x_N-3)+(y_N-6)i|$

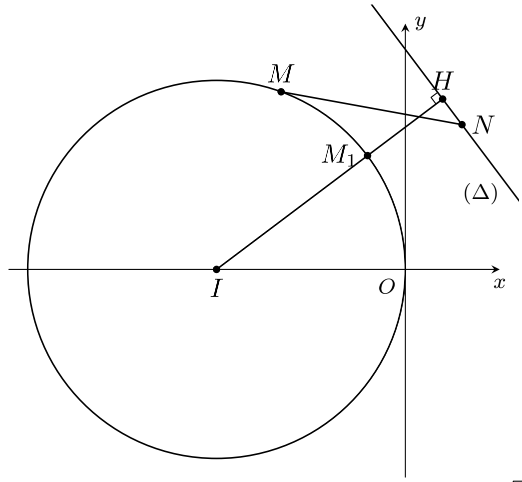
$\Leftrightarrow 8x+6y-35=0$.

Vậy N nằm trên đường thẳng $(\Delta)\colon 8x+6y-35=0$.

Hơn nữa $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}=MN$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (Δ), (d) cắt (Δ) tại H, đoạn thẳng IH cắt $(\mathscr{C})$ tại M_1. Khi đó để $P=MN$ nhỏ nhất thì $M\equiv M_1$ và $N\equiv H$.

Suy ra $\min MN=M_1H=\mathrm{d}_{[I;(\Delta)]}-R=\dfrac{|8\cdot(-5)+6\cdot 0-35|}{\sqrt{8^2+6^2}}-5=\dfrac{5}{2}$.



□

Câu 79. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z\overline{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

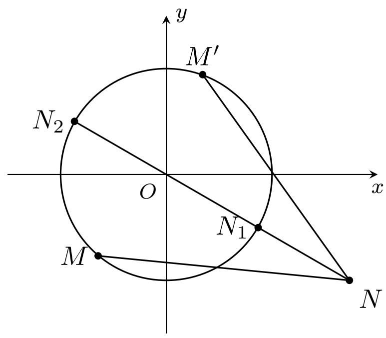
$z\overline{z}=1 \Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn các số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=1$.

Ta có $|z-\sqrt{3}+i|=m \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y+1)^2}=m \Leftrightarrow MN=m$ với $N(\sqrt{3};-1)$.

Vì đường tròn $(\mathscr{C})$ nhận ON làm trục đối xứng nên để tồn tại duy nhất số phức z hay tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn $MN=m$ thì M phải là giao điểm của ON và $(\mathscr{C})$.

Mà ON cắt $(\mathscr{C})$ tại 2 điểm N_1, N_2 nên số phần tử của S là 2.



Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z^2-z|+|z^2+z|$ với z là số phức thỏa mãn $|z|=1$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

$|z|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Vậy tập hợp điểm $C(x;y)$ biểu diễn các số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có

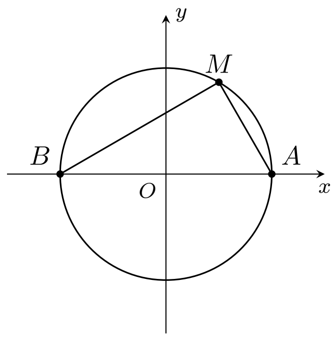
$$\begin{aligned}P=|z^2-z|+|z^2+z|&=|z||z-1|+|z||z+1|\\&=|(x-1)+yi|+|(x+1)+yi|\\&=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\\&=MA+MB\end{aligned}$$

với $A(1;0)$ và $B(-1;0)$.

Dễ thấy AB là đường kính của đường tròn $(\mathscr{C})$ nên $AB=2$.

Khi đó $P=MA+MB\le\sqrt{2(MA^2+MB^2)}=\sqrt{2AB^2}=2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $MA=MB$ hay M là điểm chính giữa cung AB. Suy ra $\max P=2\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 81. Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|iz+\dfrac{2}{1-i}\right|+\left|iz+\dfrac{2}{i-1}\right|=4$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M\cdot n$.

A. $M\cdot n=2$. **B.** $M\cdot n=1$. **C.** $M\cdot n=2\sqrt{2}$. **D.** $M\cdot n=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left|iz+\frac{2}{1-i}\right|+\left|iz+\frac{2}{i-1}\right|=4$$

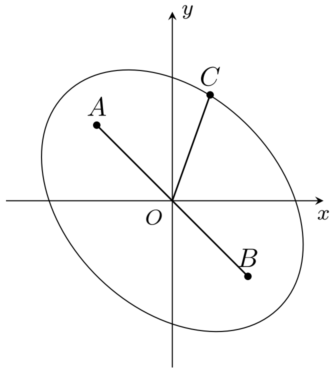
$\Leftrightarrow |i(x+yi)+1+i|+|i(x+yi)-1-i|=4$

$\Leftrightarrow |(-y+1)+(x+1)i|+|(-y-1)+(x-1)i|=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=4$

$\Leftrightarrow CA+CB=4>2\sqrt{2}=AB.$

với $C(x;y)$, $A(-1;1)$ và $B(1;-1)$.



Vậy tập hợp điểm $C(x;y)$ biểu diễn các số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ là elip (E) nhận A và B làm hai tiêu điểm với độ dài trục lớn bằng 4, tiêu cự bằng $2\sqrt{2}$.

Dễ thấy O là trung điểm của AB nên O là tâm đối xứng của elip (E).

Mà $|z|=OC$ nên OC lớn nhất khi C nằm trên trục lớn và nhỏ nhất khi C nằm trên trục nhỏ của elip (E).

$$\Rightarrow \begin{cases} M=\dfrac{4}{2}=2\\ n=\sqrt{\left(\dfrac{4}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Vậy $M\cdot n=2\sqrt{2}$.

! Nếu tập hợp điểm biểu diễn z là một elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ thì $\begin{cases}\max|z|=\max OM=a\\ \min|z|=\min OM=b\end{cases}$.

Chọn đáp án C □

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 3.1. Căn bậc hai của số phức

Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức $w=a+bi$ và tìm như sau

$$a+bi\Leftrightarrow x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow (a^2-b^2)+(2ab)\cdot i=x+yi\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2=x\\ 2ab=y\end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được a, b. Từ đó tìm được căn bậc hai của số phức z.

! Ta có thể làm tương tự đối với các trường hợp căn bậc ba, bậc bốn.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$. **ĐS:** $1+2i$ và $-1-2i$

Lời giải.

Gọi $w=a+bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$\begin{aligned}&-3+4i=(a+bi)^2\Leftrightarrow (a^2-b^2)+(2ab)\cdot i=-3+4i\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}a^2-b^2=-3\\ 2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\dfrac{4}{a^2}+3=0\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+3a^2-4=0\\ ab=2\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2=1\\ a^2=-4\end{array}\right.\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\pm1\\ a=\pm2i\end{array}\right.\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\pm1\Rightarrow b=\pm2\\ a=\pm2i\Rightarrow b=\pm i.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1=1+2i$ và $w_2=-1-2i$. □

⚠ *Tìm căn bậc, căn bậc bốn của số phức $z = a + bi$ bằng máy tính bỏ túi: Để máy tính ở chế độ ra-đian* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{MODE}$ - $\boxed{4}$ *và để chế độ số phức* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{MODE}$ - $\boxed{2}$.

— *Tìm căn bậc hai* $\sqrt{|a+bi|}\angle\left(\dfrac{\arg(a+bi)}{2}+\dfrac{2\pi X}{2}\right)$ $\boxed{CALC}$ $\begin{cases} X=0 \Rightarrow w_1 = \ldots \\ X=1 \Rightarrow w_2 = \ldots \end{cases}$

— *Tìm căn bậc bốn* $\sqrt[4]{|a+bi|}\angle\left(\dfrac{\arg(a+bi)}{4}+\dfrac{2\pi X}{4}\right)$ $\boxed{CALC}$ $\begin{cases} X=0 \Rightarrow w_1 = \ldots \\ X=1 \Rightarrow w_2 = \ldots \\ X=2 \Rightarrow w_3 = \ldots \\ X=3 \Rightarrow w_4 = \ldots \end{cases}$

Trong đó $|\quad|$ *bằng* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{HYP}$; $\angle$ *bằng* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{(-)}$; $\arg(\quad)$ *bằng* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{2}$ - $\boxed{1}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tìm căn bậc hai của số phức sau

① $z = -5 + 12i$. **ĐS:** $w = \pm 2 \pm 3i$

② $z = 8 + 6i$. **ĐS:** $w = \pm 3 \pm i$

③ $z = 3 - 4i$. **ĐS:** $w = \pm 2 \mp i$

④ $z = 33 - 56i$. **ĐS:** $w = \pm 7 \mp 4i$

⑤ $z = 4 + 6\sqrt{5}i$. **ĐS:** $w = \pm 3 \pm i\sqrt{5}$

⑥ $z = -1 - 2\sqrt{6}i$. **ĐS:** $w = \pm\sqrt{2} \mp i\sqrt{3}$

Lời giải.

① Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$-5+12i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)+(2ab)\cdot i = -5+12i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-5 \\ 2ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{36}{a^2}+5=0 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4+5a^2-36=0 \\ ab=6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2=4 \\ a^2=-9 \end{array}\right. \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\pm 2 \\ a=\pm 3i \end{array}\right. \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\pm 2 \Rightarrow b=\pm 3 \\ a=\pm 3i \Rightarrow b=\mp 2i. \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 2 + 3i$ và $w_2 = -2 - 3i$.

② Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$8+6i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)+(2ab)\cdot i = 8+6i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{9}{a^2}-8=0 \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-8a^2-9=0 \\ ab=3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2=9 \\ a^2=-1 \end{array}\right. \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\pm 3 \\ a=\pm i \end{array}\right. \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\pm 2 \Rightarrow b=\pm 1 \\ a=\pm i \Rightarrow b=\mp 3i. \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 3 + i$ và $w_2 = -3 - i$.

③ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$3-4i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)+(2ab)\cdot i = 3-4i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{4}{a^2}-3=0 \\ ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-3a^2-4=0 \\ ab=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2=-1 \\ a^2=-4 \end{array}\right. \\ ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\pm i \\ a=\pm 2i \end{array}\right. \\ ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\pm i \Rightarrow b=\pm 2i \\ a=\pm 2i \Rightarrow b=\pm 2i. \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = -2 + i$ và $w_2 = 2 - i$.

④ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$33 - 56i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)\cdot i = 33 - 56i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{784}{a^2} - 33 = 0 \\ ab = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 33a^2 - 784 = 0 \\ ab = -28 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2 = -16 \\ a^2 = 49 \end{array}\right. \\ ab = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \pm 4i \\ a = \pm 7 \end{array}\right. \\ ab = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm 4i \Rightarrow b = \pm 7i \\ a = \pm 7 \Rightarrow b = \mp 4. \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 7 - 4i$ và $w_2 = -7 + 4i$.

⑤ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$4 + 6\sqrt{5}i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)\cdot i = 4 + 6\sqrt{5}i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{45}{a^2} - 4 = 0 \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4a^2 - 45 = 0 \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ a^2 = -5 \end{array}\right. \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \pm 3 \\ a = \pm i\sqrt{5} \end{array}\right. \\ ab = 3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm 3 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5} \\ a = \pm\sqrt{5}i \Rightarrow b = \mp 3i. \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = 3 + \sqrt{5}i$ và $w_2 = -3 - \sqrt{5}i$.

⑥ Gọi $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức z khi đó

$$-1 - 2\sqrt{6}i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)\cdot i = -1 - 2\sqrt{6}i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{6}{a^2} + 1 = 0 \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + a^2 - 6 = 0 \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2 = 2 \\ a^2 = -3 \end{array}\right. \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{2} \\ a = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right. \\ ab = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow b = \mp\sqrt{3} \\ a = \pm i\sqrt{3} \Rightarrow b = \pm i\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai của số phức z là $w_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$ và $w_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

□

DẠNG 3.2. Phương trình bậc hai với hệ số phức

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (1) với $a \neq 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

— *Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.*

— *Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai của Δ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.*

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

ĐS: $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{12}}{2}$ và $z_2 = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{2}$.

Lời giải.
Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = -12$. Căn bậc hai của Δ là $\pm i\sqrt{12}$.
Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{12}}{2}$ và $z_2 = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{2}$. □

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$.

① $z^2-(1+i)z+6+3i=0$. **ĐS:** $z_1=1-2i$ và $z_2=3i$

② $z^2+3(1+i)z+5i=0$. **ĐS:** $z_1=-1-2i$ và $z_2=-2-i$

③ $z^2+(1+i)z-2-i=0$. **ĐS:** $z_1=1$ và $z_2=-2-i$

④ $z^2-8(1-i)z+63-16i=0$. **ĐS:** $z_1=5-12i$ và $z_2=3+4i$

⑤ $(2-3i)z^2+(4i-3)z+1-i=0$. **ĐS:** $z_1=1$ và $z_2=-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$

⑥ $4z^2+(12i-4)z+2i-8=0$. **ĐS:** $z_1=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$ và $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Lời giải.

① Ta có $\Delta=(1+i)^2-4(6+3i)=-24-10i\neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.
Gọi $\delta=a+bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$-24-10i=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+(2ab)\cdot i=-24-10i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-24\\2ab=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\dfrac{25}{a^2}+24=0\\ab=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+24a^2-25=0\\ab=-5\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2=1\\a^2=-25\end{array}\right.\\ab=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\pm1\\a=\pm5i\end{array}\right.\\ab=-5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\pm1\Rightarrow b=\mp5\\a=\pm5i\Rightarrow b=\pm i.\end{array}\right.$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1=1-5i$ và $\delta_2=-1+5i$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1=1-2i$ và $z_2=3i$.

② Ta có $\Delta=(3+3i)^2-4\cdot5i=-2i\neq0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.
Dễ thấy căn bậc hai của Δ là $-1+i$ hoặc $1-i$.
Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1=1-2i$ và $z_2=-2-i$.

③ Ta có $\Delta=(1+i)^2+4(2+i)=8+6i\neq0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.
Gọi $\delta=a+bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$8+6i=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+(2ab)\cdot i=8+6i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=8\\2ab=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\dfrac{9}{a^2}-8=0\\ab=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-8a^2-9=0\\ab=3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2=-1\\a^2=9\end{array}\right.\\ab=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\pm i\\a=\pm3\end{array}\right.\\ab=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\pm i\Rightarrow b=\mp3i\\a=\pm3\Rightarrow b=\pm1.\end{array}\right.$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1=3+i$ và $\delta_2=-3-i$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1=1$ và $z_2=-2-i$.

④ Ta có $\Delta=(8-8i)^2-4(63-16i)=-252-64i\neq0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.
Gọi $\delta=a+bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$-252-64i=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+(2ab)\cdot i=-252-64i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-252\\2ab=-64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\dfrac{1024}{a^2}+252=0\\ab=-32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+252a^2-1024=0\\ab=-32\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2=4\\a^2=-256\end{array}\right.\\ab=-32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\pm2\\a=\pm16i\end{array}\right.\\ab=-32\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\pm2\Rightarrow b=\mp16\\a=\pm16i\Rightarrow b=\pm2i.\end{array}\right.$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1=2-16i$ và $\delta_2=-2+16i$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1=5-12i$ và $z_2=3+4i$.

⑤ Ta có $\Delta = (4i-3)^2 - 4(1-i)(2-3i) = -3-4i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.
Gọi $\delta = a+bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$
\begin{aligned}
& -3-4i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2) + (2ab)\cdot i = -3-4i \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a^2-b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{4}{a^2} + 3 = 0 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \\ ab = -2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = -4 \end{array}\right. \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = \pm 2i \end{array}\right. \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm 1 \Rightarrow b = \mp 2 \\ a = \pm 2i \Rightarrow b = \pm i. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = 1-2i$ và $\delta_2 = -1+2i$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = 1$ và $z_2 = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$.

⑥ Ta có $\Delta = (12i-4)^2 - 16(2i-8) = -128i \neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.
Gọi $\delta = a+bi$ là căn bậc hai của số phức Δ khi đó

$$
\begin{aligned}
& -128i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2) + (2ab)\cdot i = -128i \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a^2-b^2 = 0 \\ 2ab = -128 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 8i \\ a = -b = -8i. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Suy ra có hai căn bậc hai của số phức Δ là $\delta_1 = -8+8i$ và $\delta_2 = 8-8i$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$ và $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình sau trên tập số phức.

① $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0$. **ĐS:** $z = 2i$, $z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$
\begin{aligned}
& (z-2i)(z^2-2z+4) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} z = 2i \\ z^2 - 2z + 4 = 0. \quad (1) \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Giải (1). $\Delta' = -3$ có một căn bậc hai là $\sqrt{3}i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = 1 \pm \sqrt{3}i$. □

② $z^3 + (1+i)z^2 + (3+i)z + 3i = 0$. **ĐS:** $z = -i$, $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$
\begin{aligned}
& (z+i)(z^2+z+3) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} z = -i \\ z^2 + z + 3 = 0. \quad (1) \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Giải (1). $\Delta = -11$ có một căn bậc hai là $\sqrt{11}i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$. □

③ $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$. **ĐS:** $z = 2i$, $z = -1 \pm 2i$

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$
\begin{aligned}
& (z-2i)(z^2+2z+5) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} z = 2i \\ z^2 + 2z + 5 = 0. \quad (1) \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Giải (1). $\Delta' = -4$ có một căn bậc hai là $2i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = -1 \pm 2i$. □

BÀI 3. Giải các phương trình sau trên tập số phức.

① $2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z+1)i = 0.$ **ĐS:** $z = -\dfrac{1}{2}$, $z = 1 + i$, $z = 2 - i$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & (2z+1)(z^2 - 3z + 3 + i) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} z = -\dfrac{1}{2} \\ z^2 - 3z + 3 + i = 0. \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta = -3 - 4i$, gọi $a + bi$ là một căn bậc hai của Δ, ta có

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2}{a} \\ a^2 - \dfrac{4}{a^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a;b) = (1;-2) \\ (a;b) = (-1;2). \end{array}\right.$$

Do đó Δ có một căn bậc hai là $1 - 2i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = 1 + i$, $z = 2 - i$. □

② $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$ **ĐS:** $z = 1$, $z = i$, $z = 1 + i$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & (z-1)(z^2 - (1+2i)z - 1 + i) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0. \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta = 1$ có một căn bậc hai là 1 nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = i$, $z = 1 + i$. □

③ $z^3 - (2i-1)z^2 + (3-2i)z + 3 = 0.$ **ĐS:** $z = -1, z = -i, z = 3i$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & (z+1)(z^2 - 2iz + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^2 - 2iz + 3 = 0. \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải (1). $\Delta' = -4$ có một căn bậc hai là $2i$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $z = 3i$, $z = -i$. □

BÀI 4. Giải các phương trình sau trên tập số phức.

① $z^4 - z^3 + \dfrac{z^2}{2} + z + 1 = 0.$ **ĐS:** $z = 1 \pm i$, $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$

Lời giải.

Rõ ràng $z = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế cho z^2 ta được phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & z^2 - z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{5}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ta có $\Delta = -9 = (3i)^2$ nên $\left[\begin{array}{l} z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1-3i}{2} \\ z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1+3i}{2}. \end{array}\right.$

— Với $z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0$, $\Delta = 8 - 6i = (3-i)^2$. Do đó $z = 1 - i;\ z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

— Với $z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$, $\Delta = 8 + 6i = (3+i)^2$. Do đó $z = 1 + i;\ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

□

② $(z-i)(z+2i)(z+4i)(z+7i)=34$. **ĐS:** $z=\pm 1-3i$, $z=(-3\pm 3\sqrt{2})i$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\left(z^2+6iz+7\right)\left(z^2+6iz-8\right)=34.$$

Đặt $z^2+6iz+7=t$ ta được phương trình

$$t(t-15)=34 \Leftrightarrow t^2-15t-34=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=17 \\ t=-2. \end{array}\right.$$

— Với $t=17 \Rightarrow z^2+6iz-10=0$, $\Delta'=1 \Rightarrow z=-3i\pm 1$.

— Với $t=-2 \Rightarrow z^2+6iz+7=-2$, $\Delta'=-18=\left(3\sqrt{2}i\right)^2 \Rightarrow z=-3i\pm 3\sqrt{2}i$.

□

DẠNG 3.3. Tìm các thuộc tính của số phức thỏa mãn điều kiện K

Phương pháp giải

— ***Bước 1***: *Gọi số phức cần tìm là $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.*

— ***Bước 2***: *Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến mô-đun, biểu thức có chứa z, $\overline{z}$, $|z|$,...) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình nhờ hai số phức bằng nhau, rồi suy ra x, y và z.*

> **!** *Trong tập số phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z=x+yi$ có phần thực là x phần ảo là y với $x,y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó, ta cần nhớ*
>
> – *Mô-đun của số phức $z=x+yi$ là $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.*
>
> – *Số phức liên hợp của $z=x+yi$ là $\overline{z}=x-yi$.*
>
> – *Hai số phức $z_1=x_1+y_1i$ và $z_2=x_2+y_2i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2. \end{cases}$*

Trong tài liệu này, để cho ngắn gọn, ta kí hiệu phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là $\operatorname{Re}(z)$ và $\operatorname{Im}(z)$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp sau:

① $z=(2+4i)+2i(1-3i)$. **ĐS:** $z=8+6i$, $|z|=10$. ② $z=\dfrac{2-i}{1-2i}-\dfrac{1+i}{3i}$. **ĐS:** $z=\dfrac{7}{15}+\dfrac{14}{15}i$, $|z|=\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải.

① Ta có $z=2+4i+2i+6=8+6i$, nên $\overline{z}=8-6i$, $\operatorname{Re}(z)=8$, $\operatorname{Im}(z)=6$ và $|z|=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

② Ta có $z=\dfrac{(2-i)(1+2i)}{1+4}-\dfrac{(1+i)i}{-3}=\dfrac{2+2+(4-1)i}{5}+\dfrac{-1+i}{3}=\dfrac{17}{15}+\dfrac{14}{15}i$.

Suy ra $\overline{z}=\dfrac{17}{15}-\dfrac{14}{15}i$, $\operatorname{Re}(z)=\dfrac{17}{15}$, $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{14}{15}$ và $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{7}{15}\right)^2+\left(\dfrac{14}{15}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện:

① $(2-i)x+(2+y)i=2+2i$. **ĐS:** $x=1, y=1$. ② $\dfrac{x-2}{1+i}+\dfrac{y-3}{1-i}=i$. **ĐS:** $x=1, y=4$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}&(2-i)x+(2+y)i=2+2i\\ \Leftrightarrow\ &2x+(2+y-x)i=2+2i\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}2x=2\\ 2+y-x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1.\end{cases}\end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{x-2}{1+i}+\frac{y-3}{1-i}=i\\ \Leftrightarrow\ &(x-2)(1-i)+(y-3)(1+i)=i(1+1)\\ \Leftrightarrow\ &(x+y-5)+(y-x-1)i=2i\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x+y-5=0\\ y-x-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4.\end{cases}\end{aligned}$$

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp sau.

① $z=(3-2i)^2+(2+i)^3$. **ĐS:** $z=7-i$, $|z|=5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z=(9-4-12i)+(8+12i-6-i)=7-i$.
Suy ra $\overline{z}=7+i$, $\operatorname{Re}(z)=7$, $\operatorname{Im}(z)=-1$ và $|z|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=5\sqrt{2}$. □

② $\omega=z_1-2z_2$, biết rằng $z_1=1+2i$, $z_2=2-3i$. **ĐS:** $\omega=-3+8i$, $|\omega|=\sqrt{73}$.

Lời giải.

Ta có $\omega=1+2i-2(2-3i)=-3+8i$, nên $\overline{\omega}=-3-8i$, $\operatorname{Re}(\omega)=-3$, $\operatorname{Im}(\omega)=8$ và $|\omega|=\sqrt{(-3)^2+8^2}=\sqrt{73}$. □

③ $z=(1+i)^n$, với $n\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$. **ĐS:** $z=8-8i$, $|z|=8\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3\Leftrightarrow(n-3)(n+9)=4^3\Leftrightarrow n=7.$$

Do đó $z=(1+i)^7=(2i)^3(1+i)=-8i(1+i)=8-8i$. Suy ra $\overline{z}=8+8i$, $\operatorname{Re}(z)=8$, $\operatorname{Im}(z)=-8$ và $|z|=8\sqrt{2}$. □

④ $z=\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$. **ĐS:** $z=-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có

- $(1+i)^{100}=(2i)^{50}=2^{50}\cdot(i^2)^{25}=-2^{50}$.
- $(1-i)^{96}=(-2i)^{48}=2^{48}\cdot(i^2)^{24}=2^{48}$.
- $i(1+i)^{98}=i(2i)^{49}=-2^{49}\cdot(i^2)^{24}=-2^{49}$.

Do đó $z=\dfrac{-2^{50}}{2^{48}+2^{49}}=\dfrac{-2^2}{1+2}=-\dfrac{4}{3}$. Suy ra $\overline{z}=-\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{Re}(z)=-\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{Im}(z)=0$ và $|z|=\dfrac{4}{3}$. □

⑤ $z=\left(\dfrac{z_1-3\overline{z}_2}{4z_2}\right)^{2015}$, với $z_1=4+3i$, $z_2=-i$. **ĐS:** $z=-i$, $|z|=1$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{z_1-3\overline{z}_2}{4z_2}=\dfrac{4+3i-3i}{-4i}=i$.
Nên $z=i^{2015}=(i^2)^{1007}\cdot i=-i$. Suy ra $\overline{z}=i$, $\operatorname{Re}(z)=0$, $\operatorname{Im}(z)=-1$ và $|z|=1$.

□

⑥ $\overline{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-i\sqrt{2})$. **ĐS:** $z=5-\sqrt{2}i$, $|z|=\sqrt{27}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=(2-1+2\sqrt{2}i)(1-i\sqrt{2})=1+4+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})i=5+\sqrt{2}i$.
Suy ra $z=5-\sqrt{2}i$, $\operatorname{Re}(z)=5$, $\operatorname{Im}(z)=-\sqrt{2}$, $|z|=3\sqrt{3}$. □

⑦ $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$. **ĐS:** $z = 2+2i$, $|z| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1+i)^3} = \dfrac{1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i}{1+3i-3-i} = \dfrac{-8}{-2+2i} = \dfrac{4}{1-i} = \dfrac{4(1+i)}{1+1} = 2+2i$.
Suy ra $\overline{z} = 2-2i$, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 2$ và $|z| = 2\sqrt{2}$. □

BÀI 2. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện.

① $(1-2i)x + (1+2y)i = 1+i$. **ĐS:** $x = 1, y = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (1-2i)x + (1+2y)i = 1+i \\
\Leftrightarrow\ & x + (1+2y-2x)i = 1+i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = 1 \\ 1+2y-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

② $\dfrac{x-3}{3+i} + \dfrac{y-3}{3-i} = i$. **ĐS:** $x = -2, y = 8$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)(3-i) + (y-3)(3+i) = i(9+1) \\
\Leftrightarrow\ & (3x+3y-18) + (y-x)i = 10i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3x+3y-18 = 0 \\ y-x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính $P = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^3 + \left(z^3+\dfrac{1}{z^3}\right)^4 + \left(z^4+\dfrac{1}{z^4}\right)^5$, biết $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **ĐS:** $P = 15$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i\sqrt{3})^2+4}{2(-1+i\sqrt{3})} = \frac{(1-3+4-2\sqrt{3}i)(-1-i\sqrt{3})}{2(1+3)} \\
&= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{8} = \frac{-(1+3)}{4} = -1.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
z^2 + \frac{1}{z^2} &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2 = -1; \\
z^3 + \frac{1}{z^3} &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2; \\
z^4 + \frac{1}{z^4} &= \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 = -1.
\end{aligned}$$

Do đó $P = (-1)^2 + (-1)^3 + 2^4 + (-1)^5 = 15$. □

3. Bài tập rèn luyện

BÀI 4. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp sau.

① $\omega = z_1 \cdot z_2$, biết rằng $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 3-4i$. **ĐS:** $\omega = 26+7i$, $|\omega| = 5\sqrt{29}$.

Lời giải.

Ta có $\omega = (2+5i)\cdot(3-4i) = 6+20+(15-8)i = 26+7i$.
Suy ra $\overline{\omega} = 26-7i$, $\mathrm{Re}(\omega) = 26$, $\mathrm{Im}(\omega) = 7$ và $|\omega| = \sqrt{26^2+7^2} = 5\sqrt{29}$. □

② $z=(2-4i)(5+2i)+\dfrac{4-2i}{1+i}$. **ĐS:** $z=19-19i$, $|z|=19\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z=10+8+(4-20)i+\dfrac{2(2-i)(1-i)}{1+1}=18-16i+(2-1)+(-2-1)i=19-19i$.
Suy ra $\overline{z}=19+19i$, $\operatorname{Re}(z)=19$, $\operatorname{Im}(z)=-19$ và $|z|=\sqrt{19^2+(-19)^2}=19\sqrt{2}$. □

③ $\overline{z}=(1+i)^{2020}$. **ĐS:** $z=-2^{1010}$, $|z|=2^{1010}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=(1+2i-1)^{1010}=2^{1010}(i^2)^{505}=-2^{1010}$. Nên $z=-2^{1010}$, $\operatorname{Re}(z)=-2^{1010}$, $\operatorname{Im}(z)=0$ và $|z|=2^{1010}$. □

④ $z=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots+(1+i)^{20}$. **ĐS:** $z=-2^{10}+\left(2^{10}+1\right)i$.

Lời giải.

Theo công thức tổng của một cấp số nhân ta có

$$z=\frac{1\left[1-(1+i)^{21}\right]}{1-(1+i)}=\frac{1-(2i)^{10}(1+i)}{-i}=\left[1+2^{10}(1+i)\right]i=-2^{10}+(2^{10}+1)i.$$

Suy ra $\overline{z}=-2^{10}-(2^{10}+1)i$, $\operatorname{Re}(z)=-2^{10}$, $\operatorname{Im}(z)=1+2^{10}$, $|z|=\sqrt{2^{20}+(2^{10}+1)^2}$. □

BÀI 5. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện.

① $\dfrac{x+yi}{1-i}=3+2i$. **ĐS:** $x=5, y=-1$

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x+yi}{1-i}=3+2i\Leftrightarrow x+yi=(3+2i)(1-i)\Leftrightarrow x+yi=3+2+(2-3)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-1.\end{cases}$$

□

② $(-1+4i)x+(1+2i)^3y=2+9i$. **ĐS:** $x=\dfrac{95}{46}; y=-\dfrac{17}{46}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&(-1+4i)x+(1+2i)^3y=2+9i\\
\Leftrightarrow\ &(-1+4i)x+(1+6i-12-8i)y=2+9i\\
\Leftrightarrow\ &(-x-11y)+(4x-2y)i=2+9i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-x-11y=2\\4x-2y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{95}{46}\\y=-\dfrac{17}{46}.\end{cases}\end{aligned}$$

□

BÀI 6. Tìm x, y để hai số phức $z_1=9y^2-4-10xi^5$ và $z_2=8y^2+20i^{11}$ là liên hợp của nhau. **ĐS:** $x=-2$, $y=\pm2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}z_1=9y^2-4-10xi^5=9y^2-4-10xi\\z_2=8y^2+20i^{11}=8y^2-20i.\end{cases}$

Do đó $z_1=\overline{z}_2\Leftrightarrow\begin{cases}9y^2-4=8y^2\\-10x=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=\pm2.\end{cases}$ □

> **!** Trong bài toán tìm thuộc tính của số phức z thỏa điều kiện K cho trước, nếu K là thuần z (tất cả đều z) hoặc thuần $\overline{z}$ thì đó là bài toán giải phương trình bậc nhất (phép cộng - trừ - nhân - chia số phức) với ẩn z (hoặc $\overline{z}$). Còn nếu chứa hai loại trở lên $(z,\overline{z},|z|)$ thì ta sẽ gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Từ đó sử dụng các phép toán trên số phức để đưa về hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi thực = thực, ảo = ảo để giải hệ phương trình tìm x, $y\Rightarrow z$ cần tìm.

BÀI 7. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính mô-đun của số phức trong các trường hợp:

① $(1-i)z+(2-i)=4-5i$. **(TN - 2011)** **ĐS:** $z=3-i$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)z+(2-i)=4-5i \Leftrightarrow (1-i)z=2-4i \Leftrightarrow z=\dfrac{2-4i}{1-i}=3-i$.

Vậy số phức $z=3-i$ có phần thực là 3, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\overline{z}=3+i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{10}$. □

② $2z-i\overline{z}=2+5i$. **(CĐ - 2014)** **ĐS:** $z=3+4i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$2z-i\overline{z}=2+5i \Leftrightarrow 2(x+yi)-i(x-yi)=2+5i \Leftrightarrow 2x-y+(2y-x)=2+5i \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=2\\2y-x=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=4.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=3+4i$.

Vậy số phức $z=3+4i$ có phần thực là 3, phần ảo là 4, số phức liên hợp là $\overline{z}=3-4i$, mô-đun là $|z|=5$. □

③ $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$. **(CĐ - 2009)** **ĐS:** $z=2-3i$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow (2+4i)z-(1+2i)z=8+i \Leftrightarrow (1+2i)z=8+i \Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{1+2i}=2-3i$.

Vậy số phức $z=2-3i$ có phần thực là 2, phần ảo là -3, số phức liên hợp là $\overline{z}=2+3i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{13}$. □

④ $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. **(CĐ - 2010)** **ĐS:** $z=-2+5i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$\begin{aligned}(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2 &\Leftrightarrow (2-3i)(x+yi)+(4+i)(x-yi)=8-6i\\ &\Leftrightarrow 6x+4y-(2x+2y)i=8-6i \Leftrightarrow \begin{cases}6x+4y=8\\2x+2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=5.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=-2+5i$.

Vậy số phức $z=-2+5i$ có phần thực là -2, phần ảo là 5, số phức liên hợp là $\overline{z}=-2-5i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{29}$. □

⑤ $z+(2+i)\overline{z}=3+5i$. **(A, A1 - 2014)** **ĐS:** $z=2-3i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$z+(2+i)\overline{z}=3+5i \Leftrightarrow x+yi+(2+i)(x-yi)=3+5i \Leftrightarrow 3x+y+(x-y)i=3+5i \Leftrightarrow \begin{cases}3x+y=3\\x-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-3.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=2-3i$.

Vậy số phức $z=2-3i$ có phần thực là 2, phần ảo là -3, số phức liên hợp là $\overline{z}=2+3i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{13}$. □

⑥ $2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i$. **(B - 2014)** **ĐS:** $z=2+3i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i \Leftrightarrow 2(x+yi)+3(1-i)(x-yi)=1-9i \Leftrightarrow 5x-3y-(3x+y)i=1-9i \Leftrightarrow \begin{cases}5x-3y=1\\3x+y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=3.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=2+3i$.

Vậy số phức $z=2+3i$ có phần thực là 2, phần ảo là 3, số phức liên hợp là $\overline{z}=2-3i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{13}$. □

⑦ $(3z-\overline{z})(1+i)-5z=8i-1$. **(D - 2014)** **ĐS:** $z=3-2i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$\begin{aligned}(3z-\overline{z})(1+i)-5z=8i-1 &\Leftrightarrow (2x+4yi)(1+i)-5(x+yi)=8i-1\\ &\Leftrightarrow -3x-4y+(2x-y)i=8i-1 \Leftrightarrow \begin{cases}3x+4y=1\\2x-y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=-2.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=3-2i$.

Vậy số phức $z=3-2i$ có phần thực là 3, phần ảo là -2, số phức liên hợp là $\overline{z}=3+2i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{13}$. □

8. $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$. **(D - 2011 CB)** **ĐS:** $z=2-i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$z-(2+3i)\overline{z}=1-9i\Leftrightarrow x+yi-(2+3i)(x-yi)=1-9i\Leftrightarrow -x-3y-(3x-3y)i=1-9i\Leftrightarrow\begin{cases}-x-3y=1\\3x-3y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=2-i$.
Vậy số phức $z=2-i$ có phần thực là 2, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\overline{z}=2+i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{5}$. □

9. $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$. **(A - 2011 NC)** **ĐS:** $z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$\begin{aligned}(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i&\Leftrightarrow(2x-1+2yi)(1+i)+(x+1-yi)(1-i)=2-2i\\&\Leftrightarrow 3x-3y+(x+y-2)i=2-2i\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3y=2\\x+y-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$.
Vậy số phức $z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$ có phần thực là $\dfrac{1}{3}$, phần ảo là $-\dfrac{1}{3}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$, mô-đun là $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. □

10. $z\overline{z}+3(z-\overline{z})=4-3i$. **ĐS:** $z=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$z\overline{z}+3(z-\overline{z})=4-3i\Leftrightarrow x^2+y^2+6yi=4-3i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\6y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.
Kết luận

— Số phức $z=\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ có phần thực là $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$, phần ảo là $-\dfrac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, mô-đun là $|z|=2$.

— Số phức $z=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ có phần thực là $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$, phần ảo là $-\dfrac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, mô-đun là $|z|=2$.

□

11. $z^3=18+26i$. **ĐS:** $z=3+i$; $z=\dfrac{-3+\sqrt{3}-\left(1+3\sqrt{3}\right)i}{2}$; $z=\dfrac{-3-\sqrt{3}-\left(1-3\sqrt{3}\right)i}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$z^3=18+26i\Leftrightarrow(x+yi)^3=18+26i\Leftrightarrow x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i=18+26i\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3xy^2=18 & (1)\\3x^2y-y^3=26 & (2).\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $13(x^3-3xy^2)-9(3x^2y-y^3)=0\Leftrightarrow 13x^3-27x^2y-39xy^2+9y^3=0\Rightarrow x=3y$, thay vào (1), ta được $27y^3-9y^3=18\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=3\Rightarrow z=3+i$.
Do đó, ta có $z^3=18+26i\Leftrightarrow z^3=(3+i)^3\Leftrightarrow(z-3-i)\left[z^2+(3+i)z+8+6i\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=3+i\\&z^2+(3+i)z+8+6i=0\end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + i \\ z = \dfrac{-3 + \sqrt{3} - \left(1 + 3\sqrt{3}\right) i}{2} \\ z = \dfrac{-3 - \sqrt{3} - \left(1 - 3\sqrt{3}\right) i}{2}. \end{array}\right.$$

Kết luận

- Số phức $z = 3 + i$ có phần thực là 3, phần ảo là 1, số phức liên hợp là $\overline{z} = 3 - i$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$.
- Số phức $z = \dfrac{-3 + \sqrt{3} - \left(1 + 3\sqrt{3}\right) i}{2}$ có phần thực là $\dfrac{-3 + \sqrt{3}}{2}$, phần ảo là $-\dfrac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z} = \dfrac{-3 + \sqrt{3} + \left(1 + 3\sqrt{3}\right) i}{2}$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$.
- Số phức $z = \dfrac{-3 - \sqrt{3} - \left(1 - 3\sqrt{3}\right) i}{2}$ có phần thực là $\dfrac{-3 - \sqrt{3}}{2}$, phần ảo là $-\dfrac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z} = \dfrac{-3 - \sqrt{3} + \left(1 - 3\sqrt{3}\right) i}{2}$, mô-đun là $|z| = \sqrt{10}$.

Vậy số phức □

(12) $z^2 + |z| = 0$. **ĐS:** $z = 0$; $z = \pm i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 0$ hoặc $z = i$ hoặc $z = -i$.

Kết luận

- Số phức $z = 0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0, số phức liên hợp là $\overline{z} = 0$, mô-đun là $|z| = 0$.
- Số phức $z = i$ có phần thực là 0, phần ảo là 1, số phức liên hợp là $\overline{z} = -i$, mô-đun là $|z| = 1$.
- Số phức $z = -i$ có phần thực là 0, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\overline{z} = i$, mô-đun là $|z| = 1$.

□

(13) $z^2 = |z|^2 + \overline{z}$. **(A - 2011 CB)** **ĐS:** $z = 0$; $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 + \overline{z} \quad &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = x^2 + y^2 + x - yi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 + x - yi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y^2 \\ (2x + 1)y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 0$; $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$.

Kết luận

- Số phức $z = 0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0, số phức liên hợp là $\overline{z} = 0$, mô-đun là $|z| = 0$.
- Số phức $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ có phần thực là $-\dfrac{1}{2}$, phần ảo là $\dfrac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$, mô-đun là $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Số phức $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ có phần thực là $-\dfrac{1}{2}$, phần ảo là $-\dfrac{1}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, mô-đun là $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

□

(14) $(z+1)^2+|z-1|^2+10i=\overline{z}+3$. **ĐS:** $z=1-2i$; $z=-\dfrac{1}{2}-5i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$\begin{aligned}(z+1)^2+|z-1|^2+10i=\overline{z}+3 &\Leftrightarrow (x+yi+1)^2+(x-1)^2+y^2+10i=x-yi+3\\ &\Leftrightarrow x^2-y^2+1+2xyi+2yi+2x+x^2-2x+1+y^2+10i=x+3-yi\\ &\Leftrightarrow 2x^2+2+(2xy+2y+10)i=x+3-yi\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2=x+3\\ 2xy+2y+10=-y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-5.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=1-2i$; $z=-\dfrac{1}{2}-5i$.

Kết luận

— Số phức $1-2i$ có phần thực là 1, phần ảo là -2, số phức liên hợp là $\overline{z}=1+2i$, mô-đun là $|z|=\sqrt{5}$.

— Số phức $-\dfrac{1}{2}-5i$ có phần thực là $-\dfrac{1}{2}$, phần ảo là -5, số phức liên hợp là $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+5i$, mô-đun là $|z|=\dfrac{\sqrt{101}}{2}$.

□

(15) $\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$. **(B - 2011 CB)** **ĐS:** $z=-1-i\sqrt{3}$; $z=2-i\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi$. Ta có

$$\begin{aligned}\overline{z}-\frac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0 &\Leftrightarrow z\overline{z}-z=5+i\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-x-yi=5+i\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-x=5\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-\sqrt{3}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=2\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=-1-i\sqrt{3}$; $z=2-i\sqrt{3}$.

Kết luận

— Số phức $-1-i\sqrt{3}$ có phần thực là -1, phần ảo là $-\sqrt{3}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=-1+i\sqrt{3}$, mô-đun là $|z|=2$.

— Số phức $2-i\sqrt{3}i$ có phần thực là 2, phần ảo là $-\sqrt{3}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=2+i\sqrt{3}$, mô-đun là $|z|=\sqrt{7}$.

□

(16) $\dfrac{iz-(1+3i)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. **ĐS:** $z=0$; $z=-\dfrac{45}{26}-\dfrac{9}{26}i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{iz-(1+3i)\overline{z}}{1+i}=|z|^2 &\Leftrightarrow (1+i)(x+yi)-(4+2i)(x-yi)=2(x^2+y^2)\\ &\Leftrightarrow -3x-3y+(5y-x)i=2x^2+2y^2\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-3y=2x^2+2y^2\\ 5y-x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=-\dfrac{45}{26}\\ y=-\dfrac{9}{26}.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=0$; $z=-\dfrac{45}{26}-\dfrac{9}{26}i$.

Kết luận

— Số phức $z=0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0, số phức liên hợp là $\overline{z}=0$, mô-đun là $|z|=0$.

— Số phức $-\dfrac{45}{26}-\dfrac{9}{26}i$ có phần thực là $-\dfrac{45}{26}$, phần ảo là $-\dfrac{9}{26}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=-\dfrac{45}{26}+\dfrac{9}{26}i$, mô-đun là $|z|=\dfrac{9\sqrt{26}}{26}$.

□

(17) $z+\dfrac{1+i}{(1-i)\overline{z}}=(1-i)|z|$. **ĐS:** $z=-i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
z+\frac{1+i}{(1-i)\overline{z}}=(1-i)|z| &\overset{z\neq0}{\Leftrightarrow} z\overline{z}+i=(1-i)|z|\overline{z}\Leftrightarrow x^2+y^2+i=(1-i)(x-yi)\sqrt{x^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+i=(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}i\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=(x-y)\sqrt{x^2+y^2}\\ 1=-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=x-y\\ y^2-x^2=1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq y\\ xy=0\\ y^2-x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1.\end{cases}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=-i$.
Vậy số phức $z=-i$ có phần thực là 0, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\overline{z}=i$, mô-đun là $|z|=1$. □

(18) $z+i-(i+1)\cdot\dfrac{\overline{z}}{z}=\overline{z}$. **ĐS:** $z=-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
z+i-(i+1)\cdot\frac{\overline{z}}{z}=\overline{z} &\overset{z\neq0}{\Leftrightarrow} z^2+iz-(i+1)\overline{z}=z\overline{z}\Leftrightarrow(x+yi)^2+i(x+yi)-(i+1)(x-yi)=x^2+y^2\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi+xi-y-xi-y-x+yi=x^2+y^2\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2-x-2y=x^2+y^2\\ 2xy+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y^2+2y+x=0\\ (2x+1)y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}i$.
Kết luận

— Số phức $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}i$ có phần thực là $-\dfrac{1}{2}$, phần ảo là $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}i$, mô-đun là $|z|=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$.

— Số phức $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}i$ có phần thực là $-\dfrac{1}{2}$, phần ảo là $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}i$, mô-đun là $|z|=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$.

□

BÀI 8. Tìm số phức và các thuộc tính của nó trong các trường hợp sau:

(1) $w=1+z+z^2$, với $\dfrac{5(\overline{z}+i)}{z+1}=2-i$. **(A - 2012 NC)** **ĐS:** $w=2+3i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Ta có

$$\frac{5(\overline{z}+i)}{z+1} = 2 - i \overset{z \neq -1}{\Leftrightarrow} 5(x - yi + i) = (2-i)(x+yi+1) \Leftrightarrow 3x - y - 2 + (x - 7y + 6)i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x - 7y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 1 + i$. Do đó, ta có $w = 1 + z + z^2 = 1 + 1 + i + (1+i)^2 = 2 + 3i$.
Vậy số phức $w = 2 + 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là 3, số phức liên hợp là $\overline{w} = 2 - 3i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{13}$. □

② $w = \overline{z} + iz$, với $\overline{z} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}$. **ĐS:** $w = 1 + i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

Do đó, ta có $w = \overline{z} + iz = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i + i\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i$.

Vậy số phức $w = 1 + i$ có phần thực là 1, phần ảo là 1, số phức liên hợp là $\overline{w} = 1 - i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{2}$. □

③ $w = \overline{z} + iz$, với $\overline{z} = \dfrac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3}{1 - i}$. **(A - 2010 NC)** **ĐS:** $w = -8 - 8i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = \dfrac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3}{1 - i} = \dfrac{-8}{1-i} = -4 - 4i \Rightarrow z = -4 + 4i$.
Do đó, ta có $w = \overline{z} + iz = -4 - 4i + i(-4 + 4i) = -8 - 8i$.
Vậy số phức $w = -8 - 8i$ có phần thực là -8, phần ảo là -8, số phức liên hợp là $\overline{w} = -8 + 8i$, mô-đun là $|w| = 8\sqrt{2}$.
□

④ $w = \dfrac{\overline{z} - 2z + 1}{z^2}$, với $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$. **(D 2013)** **ĐS:** $w = -1 + 3i$

Lời giải.

Ta có $(1+i)(z-i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3+i)z = -1 + 3i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+3i}{3+i} = i$.

Do đó, ta có $w = \dfrac{\overline{z} - 2z + 1}{z^2} = \dfrac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i$.

Vậy số phức $w = -1 + 3i$ có phần thực là -1, phần ảo là 3, số phức liên hợp là $\overline{w} = -1 - 3i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{10}$.
□

⑤ $w = z + \dfrac{4}{z+1}$, với $1 + \overline{z} = |\overline{z} - i|^2 + (iz - 1)^2$. **ĐS:** $w = 2 - i$, $w = -\dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{2}i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \overline{z} = |\overline{z} - i|^2 + (iz - 1)^2 & \Leftrightarrow 1 + x - yi = |x - yi - i|^2 + (xi - y - 1)^2 \\ & \Leftrightarrow 1 + x - yi = x^2 + (y+1)^2 - x^2 + (y+1)^2 - 2x(y+1)i \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x = 2(y+1)^2 \\ y = 2x(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(y+1)^2 - 1 \\ 4(y+1)^3 - 2(y+1) - y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 1 - 2i$ hoặc $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Với $z = 1 - 2i$, ta có $w = z + \dfrac{4}{z+1} = 1 - 2i + \dfrac{4}{1 - 2i + 1} = 2 - i$.

Với $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$, ta có $w = z + \dfrac{4}{z+1} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i + \dfrac{4}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i + 1} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{2}i$.

Kết luận

— Số phức $w = 2 - i$ có phần thực là 2, phần ảo là -1, số phức liên hợp là $\overline{w} = 2 + i$, mô-đun là $|w| = \sqrt{5}$.

— Số phức $w=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$ có phần thực là $\frac{7}{2}$, phần ảo là $\frac{7}{2}$, số phức liên hợp là $\overline{w}=\frac{7}{2}-\frac{7}{2}i$, mô-đun là $|w|=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

□

⑥ $w=b+ci$, với $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12}(2-i)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{6}(1+i)^6}$ là nghiệm của phương trình $z^2+8bz+64c=0$. **ĐS:** $w=-2+5i$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12}(2-i)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{6}(1+i)^6}=8+16i$.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}(8+16i)^2+8b(8+16i)+64c=0 &\Leftrightarrow -192+256i+64b+128bi+64c=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-192+64b+64c=0\\ 256+128b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2\\ c=5.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow w=-2+5i$.

Vậy số phức $w=-2+5i$ có phần thực là -2, phần ảo là 5, số phức liên hợp là $\overline{w}=-2-5i$, mô-đun là $|w|=\sqrt{29}$.

□

BÀI 9. Tìm số phức và các thuộc tính khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

① $|z|=5$ và phần thực bằng 2 lần phần ảo. **ĐS:** $z=2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$, $z=-2\sqrt{5}-\sqrt{5}i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a=2b\\ \sqrt{a^2+b^2}=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\ b^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\ b=\pm\sqrt{5}.\end{cases}$$

Với $b=\sqrt{5}$, $a=2\sqrt{5}$, $z=2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$.

Với $b=-\sqrt{5}$, $a=-2\sqrt{5}$, $z=-2\sqrt{5}-\sqrt{5}i$. □

② $|z-2+i|=2$ và phần ảo nhỏ hơn phần thực 3 đơn vị. **ĐS:** $z=2\pm\sqrt{2}-(1\mp\sqrt{2})i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=3\\ \sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a-3\\ (a-2)^2+(a-2)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a-3\\ \left[\begin{array}{l}a=2+\sqrt{2}\\ a=2-\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Với $a=2+\sqrt{2}$, $b=-1+\sqrt{2}$, $z=2+\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})i$.

Với $a=2-\sqrt{2}$, $b=-1-\sqrt{2}$, $z=2-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})i$. □

③ $|z+2i-1|-\sqrt{5}|\overline{z}-2+3i|=0$. và phần thực bằng 2 lần phần ảo. **ĐS:** $z=4+2i$, $z=3+\frac{3}{2}i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned}&\begin{cases}a=2b\\ \sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}-\sqrt{5[(a-2)^2+(3-b)^2]}=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}a=2b\\ (2b-1)^2+(b+2)^2-5[(2b-2)^2+(3-b)^2]=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}a=2b\\ \left[\begin{array}{l}b=2\\ b=\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}.\end{aligned}$$

Với $b=2$, $a=4$, $z=4+2i$.

Với $b=\frac{3}{2}$, $a=3$, $z=3+\frac{3}{2}i$. □

④ $|z+1-2i)|=5$ và $z\cdot\overline{z}=34$. **ĐS:** $z=3+5i,\ z=-\dfrac{29}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=34\\ \sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=34\\ a=2b-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-7\\ (2b-7)^2+b^2=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-7\\ \left[\begin{array}{l}b=\dfrac{3}{5}\\ b=5\end{array}\right.\end{cases}.$$

Với $b=\dfrac{3}{5},\ a=-\dfrac{29}{5},\ z=-\dfrac{29}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

Với $b=5,\ a=3,\ z=3+5i$. □

⑤ $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z\cdot\overline{z}=25$. **ĐS:** $z=3+4i,\ z=5$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=25\\ \sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=25\\ b=10-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=10-2a\\ a^2+(10-2a)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=10-2a\\ \left[\begin{array}{l}a=3\\ a=5\end{array}\right.\end{cases}.$$

Với $a=3,\ b=4,\ z=3+4i$.

Với $a=5,\ b=0,\ z=5$. □

⑥ $|z+1-2i|=|\overline{z}-2-i|$ và $|z-1|=\sqrt{5}$. **ĐS:** $z=-1-i,\ z=2+2i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}\\ \sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ (a-1)^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \left[\begin{array}{l}b=-1\\ b=2\end{array}\right.\end{cases}.$$

Với $a=b=-1,\ z=-1-i$.

Với $a=b=2,\ z=2+2i$. □

⑦ $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$ và $|z^2-\overline{z}^2|=4$. **ĐS:** $z=\sqrt[3]{4}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

$2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(2b+2)^2}$.

$|z^2-\overline{z}^2|=4\Leftrightarrow|ab|=1$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(2b+2)^2}\\ |ab|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{a^2}{4}\\ |ab|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt[3]{4}\\ b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\end{cases}.$$

Suy ra $z=\sqrt[3]{4}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}i$. □

⑧ $|z|=1$ và $|z^2-\overline{z}^2|=\sqrt{3}$ với phần thực dương và phần ảo âm. **ĐS:** $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0,b<0)$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ |ab|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=\dfrac{3}{16a^2}\\ a^2+\dfrac{3}{16a^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=\dfrac{3}{16a^2}\\ \left[\begin{array}{l}a^2=\dfrac{1}{4}\\ a^2=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=\dfrac{3}{16a^2}\\ \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Với $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Với $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b=-\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$. □

BÀI 10. Tìm số phức và các thuộc tính khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
Nhận xét. Số phức là thuần ảo khi phần thực bằng 0 và số phức là thuần thực khi phần ảo bằng 0

① $|z| = \sqrt{2}$ và $\overline{z}^2$ là số thuần ảo. **ĐS:** $z = 1 \pm i$, $z = -1 \pm i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có $\overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$, theo giả thiết $\overline{z}^2$ thuần ảo suy ra $a^2 - b^2 = 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1. \end{cases}$$

Suy ra $z = 1 \pm i$, $z = -1 \pm i$. □

② $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\overline{z} + i)$ là số thực. **(D-2010 CB)** **ĐS:** $z = 1$, $z = -1 + 2i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
$(z - 1)(\overline{z} + i) = a^2 + b^2 - a - b + (a + b - 1)i$ là số thực $\Leftrightarrow b = 1 - a$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 1 - a \\ a^2 + (b - 1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a = \pm 1 \end{cases}.$$

Với $a = 1$, $b = 0$, $z = 1$.
Với $a = -1$, $b = 2$, $z = -1 + 2i$. □

③ $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\overline{z} - 2 + 5i| = 1$. **ĐS:** $z = 2 + 6i$, $z = \dfrac{7}{5} + \dfrac{21}{5}i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
$(1 - 3i)z = (1 - 3i)(a + bi) = a + 3b + (b - 3a)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 3a$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 3a \\ (a - 2)^2 + (5 - b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \dfrac{7}{5} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $a = 2$, $b = 6$, $z = 2 + 6i$.
Với $a = \dfrac{7}{5}$, $b = \dfrac{21}{5}$, $z = \dfrac{7}{5} + \dfrac{21}{5}i$. □

④ $(z - 1)(\overline{z} + 2i)$ là số thực và $|z - 1| = \sqrt{5}$ **ĐS:** $z = 2i$, $z = 2 - 2i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
$(z - 1)(\overline{z} + 2i) = a^2 + b^2 - a - 2b + (2a + b - 2)i$ là số thực $\Leftrightarrow b = 2 - 2a$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 2 - 2a \\ (a - 1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $a = 0$, $b = 2$, $z = 2i$.
Với $a = 2$, $b = -2$, $z = 2 - 2i$. □

⑤ $|z - \overline{z} + 1 - i| = \sqrt{5}$ và $(2 - z)(i + \overline{z})$ là số ảo. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i, z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i, z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{array}\right.$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
$(2 - z)(i + \overline{z}) = -a^2 - b^2 + 2a + b + (2 - a - 2b)i$ là số ảo suy ra $-a^2 - b^2 + 2a + b = 0$.
$|z - \overline{z} + 1 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (2b - 1)^2 = 5$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a^2 - b^2 + 2a + b = 0 \\ 1^2 + (2b - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 - b^2 + 2a + b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $b=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i.\end{array}\right.$

Với $b=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\\ z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i.\end{array}\right.$ □

⑥ $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$ và $(2-z)(i+\overline{z})$ là số thực. **ĐS:** $z=-1\pm\sqrt{5}+\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.
$(2-z)(i+\overline{z})=-a^2-b^2+2a+b+(2-a-2b)i$ là số thực suy ra $a=2-2b$.
Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a=2-2b\\ 2\sqrt{a^2+(b-1)^2}=|2b+2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-2b\\ 4[(2-2b)^2+(b-1)^2]=(2b+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-2b\\ b=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

Với $b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $a=-1-\sqrt{5}$, $z=-1-\sqrt{5}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}i$.
Với $b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $a=-1+\sqrt{5}$, $z=-1+\sqrt{5}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}i$. □

BÀI 11. Tìm z thỏa: $|z-3i|=|1-i\overline{z}|$ và $z-\dfrac{9}{z}$ là số thuần ảo. **ĐS:** $z=2i$, $z=\pm\sqrt{5}+2i$.

Lời giải.
Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có $z-\dfrac{9}{z}=\dfrac{(z^2-9)\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{(a^2+b^2-9)a+(a^2+b^2+9)bi}{a^2+b^2}$ là số thuần ảo suy ra

$$(a^2+b^2-9)a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a^2+b^2=9.\end{array}\right.$$

$|z-3i|=|1-i\overline{z}|\Leftrightarrow a^2+(b-3)^2=(b-1)^2+a^2\Leftrightarrow b=2$.
Với $a=0$, $b=2$, $z=2i$.
Với $a^2+b^2=9$, $b=2$, $z=\pm\sqrt{5}+2i$. □

BÀI 12. Tìm số phức z sao cho $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+i|$ và $\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}$ là số thuần ảo. **ĐS:** $z=\dfrac{-16\pm\sqrt{67}}{6}+\dfrac{17\mp\sqrt{67}}{6}i$.

Lời giải.
Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.
Ta có $\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}=\dfrac{(a+(b-2)i)(a+(b-1)i)}{a^2+(b-1)^2}$, là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2-(b-2)(b-1)=0$.
$|z+1-2i|=|\overline{z}+3+i|\Leftrightarrow(a+1)^2+(b-2)^2=(a+3)^2+(b-1)^2\Leftrightarrow b=-2a-\dfrac{5}{2}$. Ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases}b=-2a-\dfrac{5}{2}\\ a^2-(b-2)(b-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\dfrac{-16+\sqrt{67}}{6}\\ b=\dfrac{17-\sqrt{67}}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\dfrac{-16-\sqrt{67}}{6}\\ b=\dfrac{17+\sqrt{67}}{6}\end{cases}\end{array}\right.$$

Suy ra $z=\dfrac{-16\pm\sqrt{67}}{6}+\dfrac{17\mp\sqrt{67}}{6}i$. □

BÀI 13. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2$. Chứng minh rằng $|z_1|=|z_2|$.
Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
& |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
\Leftrightarrow\ & a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & |z_1| = |z_2|.
\end{aligned}$$

□

BÀI 14. ① Tìm các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $4z_1 - 3 \cdot i^{2013} = iz_1 + 5$ và $\dfrac{z_2}{z_1} - z_1^{2013} = 4$.

ĐS: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 + (4 - 2^{1007})i$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 4z_1 - 3 \cdot i^{2013} = iz_1 + 5 \Leftrightarrow (4 - i)z_1 = 5 + 3i \Leftrightarrow z_1 = \frac{5 + 3i}{4 - i} = 1 + i \\
\Rightarrow\ & z_1^{2014} = (1 + i)^{2014} = (2i)^{1007} = -2^{1007} i \\
\Rightarrow\ & z_2 = 4z_1 + z_1^{2014} = 4 + (4 - 2^{1007})i.
\end{aligned}$$

□

② $\left|\dfrac{z - 12}{z - 8i}\right| = \dfrac{5}{3}$ và $\left|\dfrac{z - 4}{z - 8}\right| = 1$.

ĐS: $z = 6 + 8i$, $z = 6 + 17i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b < 0)$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 9(a - 12)^2 + 9b^2 = 25a^2 + 25(b - 8)^2 \\ (a - 4)^2 + b^2 = (a - 8)^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ \left[\begin{array}{l} b = 8 \\ b = 17 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Suy ra $z = 6 + 8i$, $z = 6 + 17i$. □

BÀI 15. Giả sử z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|6z_1 - i| = |2 + 3iz_1|$, $|6z_2 - i| = |2 + 3iz_2|$ và $|z_1 - z_2| = \dfrac{1}{3}$. Tính mô đun của $z_1 + z_2$.

ĐS: $|z_1 + z_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{cases} |6z_1 - i| = |2 + 3iz_1| \\ |6z_2 - i| = |2 + 3iz_2| \\ |z_1 - z_2| = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = \dfrac{1}{9} \\ a_2^2 + b_2^2 = \dfrac{1}{9} \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = \dfrac{1}{9} \\ a_2^2 + b_2^2 = \dfrac{1}{9} \\ 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Suy ra $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. □

BÀI 16. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - z)(i + \overline{z})$ là số thuần ảo. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - i|$.

ĐS: $P_{\max} = \sqrt{2}$ khi $z = 1$, $P_{\min} = 0$ khi $z = i$

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có $(1 - z)(i + \overline{z}) = -a^2 - b^2 + a + b - (a + b - 1)i$, là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$-a^2 - b^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
& P^2 = a^2 + (b - 1)^2 = a - b + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right) - \left(b - \frac{1}{2}\right) + 1 \leqslant \sqrt{2\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} + 1 = 2 \\
\Rightarrow\ & 0 \leqslant P \leqslant \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = 0$ khi $z = i$, $P_{\max} = \sqrt{2}$ khi $\begin{cases} a - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - b > 0 \\ \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1.$ □

BÀI 17. Biết $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo. Tìm giá trị lớn nhất $T_{\max}$ của biểu thức $T = |z-1| + |z-i|$.

ĐS: $T_{\max} = 2\sqrt{5}$ khi $z = 2+2i$.

Lời giải.
Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Ta có $\dfrac{z-2i}{z-2} = \dfrac{(a+(b-2)i)(a-2-bi)}{(a-2)^2+b^2}$, là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$a(a-2) + (b-2)b = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} T^2 &= (|z-1| + |z-i|)^2 = |2z-1-i|^2 + |-1+i|^2 = 4(a^2+b^2) - 4(a+b) + 4 = 4(a+b) + 4 \\ &= 4(a-1) + 4(b-1) + 12 \\ &\leqslant 4\sqrt{2\left[(a-1)^2 + (b-1)^2\right]} + 12 = 20. \end{aligned}$$

Suy ra $T_{\max} = 2\sqrt{5}$ khi $a - 1 = b - 1 = 1 \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow z = 2 + 2i$. □

Dạng toán 2: Biểu diễn hình học của số phức và bài toán liên quan

Loại 1 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước.

- Bước 1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	**Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$**
• $Ax + By + C = 0$.	Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$.
• $\left[\begin{array}{l} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \end{array}\right.$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
• $\left[\begin{array}{l} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leqslant 0. \end{array}\right.$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
• $R_1^2 \leqslant (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R_2^2$.	Là những điểm thuộc miền vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
• $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.	Là một parabol (P) có đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
• $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} \lvert MF_1 + MF_2 \rvert = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a. \end{cases}$	Là một elip có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ với $a > b > 0$.
• $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} \lvert MF_1 - MF_2 \rvert = 2a \\ F_1F_2 = 2c > 2a. \end{cases}$	Là một hypebol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b > 0$.
• $MA = MB$	Là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Nhóm I (Loại đề cho trực tiếp)

BÀI 18. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng d: $3x - y + 1 = 0$.

ĐS: $z = 1 + 4i$, $z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$

Lời giải.
Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = 5 \\ 3a - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = 5 \\ b = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (3a-1)^2 = 5 \\ b = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = 4 \\ a = -\dfrac{2}{5}, b = -\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn bài toán là $z = 1 + 4i$ và $z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$. □

BÀI 19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1-2i)z - \dfrac{2-i}{1+i} = (3-i)z$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy. **ĐS:** $M\left(\dfrac{1}{10}; \dfrac{7}{10}\right)$

Lời giải.
Phương trình đã cho tương đương với

$$(-2-i)z = \frac{2-i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{i-2}{(1+i)(2+i)} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Do đó điểm biểu diễn của số phức z là điểm $M\left(\dfrac{1}{10}; \dfrac{7}{10}\right)$. □

BÀI 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = |\overline{z} - 2 + 3i|$. **ĐS:** $d\colon 4x + 6y - 13 = 0$

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Giả thiết tương đương với

$$x^2 + y^2 = (x-2)^2 + (-y+3)^2 \Leftrightarrow 4x + 6y - 13 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $4x + 6y - 13 = 0$. □

BÀI 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3-4i)| = 2$. **ĐS:** $(C)\colon (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Giả thiết tương đương với $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$.
Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3-4i)| = 2$ là đường tròn (C) có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$. □

BÀI 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |(1+i)z|$. **ĐS:** $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

Lời giải.
Vì $|(1+i)z| = |1+i| \cdot |z| = \sqrt{2}|z|$, do đó nếu gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$|z-i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn có phương trình $x^2+y^2+2y-1 = 0$.
□

BÀI 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{z}{z-i}\right| = 3$. **ĐS:** $(C)\colon x^2 + \left(y - \dfrac{9}{8}\right)^2 = \dfrac{9}{64}$

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\left|\frac{z}{z-i}\right| = 3 \Leftrightarrow |z| = 3|z-i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9\left[x^2 + (y-1)^2\right] \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn $(C)\colon x^2 + \left(y - \dfrac{9}{8}\right)^2 = \dfrac{9}{64}$. □

BÀI 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| \leq 2$. **ĐS:** $x^2 + y^2 \leq 4$

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là phần trong của hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $r = 2$. □

BÀI 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1 < |z-1| < 2$. **ĐS:** $1 < (x-1)^2 + y^2 < 4$

Lời giải.
Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$1 < |z-1| < 2 \Leftrightarrow 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là phần trong của hình tròn $(x-1)^2 + y^2 = 4$ và không thuộc hình tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$. □

BÀI 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\dfrac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo. **ĐS:** $x^2+y^2=1$, $(x\neq 0)$

Lời giải.
Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\frac{z+i}{z-i}=\frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}=\frac{[x+(y+1)i]\cdot[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}+\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\cdot i.$$

Do đó $\dfrac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2+y^2-1=0, x\neq 0$, tức là tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=1$, $(x\neq 0)$. □

BÀI 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|+|z+i|=4$. **ĐS:** $(E)\colon \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

Lời giải.
Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}|z-i|+|z+i|=4 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2\\ &\Leftrightarrow 4\left[x^2+(y+1)^2\right]=(4+y)^2\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.\end{aligned}$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường Elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. □

BÀI 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$. **ĐS:** $(P)\colon y=\dfrac{x^2}{4}$

Lời giải.
Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|\Leftrightarrow 4\left[x^2+(y-1)^2\right]=(2y+2)^2\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{4}.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường Parabol $(P)\colon y=\dfrac{x^2}{4}$. □

BÀI 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z^2-(\overline{z})^2\right|=4$. **ĐS:** $(H)\colon y=\pm\dfrac{1}{x}$

Lời giải.
Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\left|z^2-(\overline{z})^2\right|=4\Leftrightarrow 4|xy|=4\Leftrightarrow xy=\pm 1.$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường $(H)\colon y=\pm\dfrac{1}{x}$. □

BÀI 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)z+(1-i)\overline{z}=2|z+1|$. **ĐS:** $(H)\colon y=\dfrac{-2x-1}{2x}$, $(x>0)$

Lời giải.
Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$(1+i)z+(1-i)\overline{z}=2|z+1|\Leftrightarrow 2x-2y=2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\Leftrightarrow \begin{cases}2xy=-2x-1\\ x\geq y\end{cases}\ (1).$$

+ Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn (1) nên ta xét $x\neq 0$.
+ Nếu $x<0$ thì từ (1) suy ra $2x^2+2x+1\leq 0$ (mâu thuẫn!).
+ Nếu $x>0$ thì từ (1) suy ra $2x^2+2x+1\geq 0$ (luôn đúng).
Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường cong $(H)\colon y=\dfrac{-2x-1}{2x}$, $(x>0)$. □

BÀI 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+\overline{z}|+(z+\overline{z})\,i=2z$. **ĐS:** $y=x$, $(x\geq 0)$

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z+\overline{z}| + (z+\overline{z})\,i = 2z \Leftrightarrow |2x| + 2xi = 2x + 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow y = x \ (x \geq 0).$$

Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là phần đường thẳng $y = x$, $(x \geq 0)$. □

BÀI 32. Cho số phức $z = m + (m-3)i$, $(m \in \mathbb{R})$.

① Tìm tất cả các tham số m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường phân giác thứ hai $y = -x$.

② Tìm tất cả các tham số m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường hypebol $(H)\colon y = -\dfrac{2}{x}$.

ĐS: 1. $m = \dfrac{3}{2}$; 2. $m = 1$ và $m = 2$

Lời giải.

① Điểm biểu diễn của số phức z là $M(m; m-3)$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m - 3 = -m \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

② Điểm biểu diễn của số phức z là $M(m; m-3)$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$m - 3 = -\frac{2}{m} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

□

BÀI 33. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn lần lượt các số phức: $z_1 = \dfrac{4i}{i-1}$, $z_2 = (1-i)(1+2i)$ và $z_3 = \dfrac{2+6i}{3-i}$.

① Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

② Tìm số phức biểu diễn điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

ĐS: 1. $\triangle ABC$ vuông tại B; 2. $z = 1 + 5i$

Lời giải.

① Ta có $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 2i$. Suy ra $A(2; -2)$, $B(3; 1)$, $C(0; 2)$.
Tính được $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{20}$. Nhận thấy $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại B.

② Gọi $D(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình vuông là

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3) = (x; y-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 2 = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 5i.$$

□

BÀI 34. Cho các điểm A, B, C, D, M, N, P nằm trong mặt phẳng phức lần lượt biểu diễn các số phức $1+3i$, $-2+2i$, $-4-2i$, $1-7i$, $-3+4i$, $1-3i$ và $-3+2i$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm và tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp được mà ta phải tìm tâm và bán kính. Tìm điểm Q trong mặt phẳng phức sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

ĐS: $G\left(-\dfrac{5}{3}; 1\right)$, $I(1; -2)$, $R = 5$, $Q(1; -5)$

Lời giải.

Ta có $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$, $C(-4; -2)$, $D(1; -7)$, $M(-3; 4)$, $N(1; -3)$ và $P(-3; 2)$.
Gọi trọng tâm tam giác ABC và tam giác MNP lần lượt là G, G'. Ta có

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1-2-4}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ y_G = \dfrac{3+2-2}{3} = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_{G'} = \dfrac{-3+1-3}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ y_{G'} = \dfrac{4-3+2}{3} = 1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $G \equiv G'$.
Giả sử điểm $I(x; y)$ sao cho $IA^2 = IB^2 = IC^2 = ID^2$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-x)^2 + (3-y)^2 = (-2-x)^2 + (2-y)^2 \\ (-2-x)^2 + (2-y)^2 = (-4-x)^2 + (-2-y)^2 \\ (-4-x)^2 + (-2-y)^2 = (1-x)^2 + (-7-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 2 \\ 4x + 8y = -12 \\ 10x - 10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Do đó, tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = IA = 5$.
Gọi $Q(a;b)$. $MNPQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow (4;-7) = (a+3;b-2) \Leftrightarrow \begin{cases} a+3=4 \\ b-2=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow Q(1;-5).$$

$\square$

Nhóm II (loại đề cho gián tiếp)

BÀI 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = (1-2i)z+3$, biết z là số phức thỏa mãn $|z+2| = 5$. **ĐS:** $(C)\colon (x-1)^2 + (y-4)^2 = 125$

Lời giải.

Ta có $w = (1-2i)z + 3 \Rightarrow z = \dfrac{w-3}{1-2i}$. Do đó

$$|z+2| = 5 \Leftrightarrow \left|\frac{w-3}{1-2i} + 2\right| = 5 \Leftrightarrow |w-1-4i| = 5|1-2i| \Leftrightarrow |w-1-4i| = 5\sqrt{5}\ (1).$$

Đặt $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 125$.
Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 125$. $\square$

BÀI 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + 2$, biết z là số phức thỏa mãn $|z-1| = 2$. **ĐS:** $(C)\colon (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$

Lời giải.

Ta có $w = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + 2 \Rightarrow z = \dfrac{w-2}{1+i\sqrt{3}}$. Do đó

$$|z-1| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{w-2}{1+i\sqrt{3}} - 1\right| = 2 \Leftrightarrow |z-3-i\sqrt{3}| = 2|1+i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |z-3-i\sqrt{3}| = 4\ (1).$$

Đặt $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có $(1) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$.
Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$. $\square$

BÀI 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = \overline{z} + 1 - i$, biết z là số phức thỏa mãn $|z-1+2i| = 3$. **ĐS:** $(C)\colon (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

Lời giải.

Ta có $w = \overline{z} + 1 - i \Rightarrow \overline{z} = w - 1 + i \Leftrightarrow z = \overline{w} - 1 - i$. Do đó

$$|z-1+2i| = 3 \Leftrightarrow |\overline{w} - 1 - i - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |\overline{w} - 2 + i| = 3\ (1).$$

Đặt $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có $(1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.
Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. $\square$

BÀI 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa mãn điều kiện $w = 2z - i$, biết z là số phức thỏa mãn $|z-1| = 2$. **ĐS:** $(C)\colon (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{w+i}{2}$ nên $|z-1| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w+i}{2} - 1\right| = 2 \Leftrightarrow |w-2+i| = 4$ (1).
Đặt $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có $(1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$.
Vậy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w là đường tròn có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$. $\square$

BÀI 39. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $|w - iz - \overline{z}| = 2$, biết z là số phức $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{16(1+i)^5}$. **ĐS:** $(C)\colon x^2 + y^2 = 4$

Lời giải.

Ta có, $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{16(1+i)^5} = \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}i$. Khi đó, $|w - iz - \overline{z}| = 2 \Leftrightarrow \left|w - i\left(\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}i\right) + \left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16}i\right)\right| = 2 \Leftrightarrow |w| = 2$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là $(C)\colon x^2 + y^2 = 4$. $\square$

BÀI 40. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w = (1+2i)z + 1$, biết z là số phức thỏa $|z+1|^2 = \dfrac{z\overline{z}}{2}$. **ĐS:** $(C)\colon x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$, $(x; y \in \mathbb{R})$ Ta có, $w = (1+2i)z + 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{w-1}{1+2i}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
|z+1|^2 = \frac{z\overline{z}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad |z+1|^2 = \frac{|z|^2}{2} \Leftrightarrow 2\left|\frac{w-1}{1+2i} + 1\right|^2 = \left|\frac{w-1}{1+2i}\right|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\left|w+2i\right|^2 = \left|w-1\right|^2 \Leftrightarrow 2\left[x^2 + (y+2)^2\right] = (x-1)^2 + y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0.
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+8y+7=0$. □

BÀI 41. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w=(1+i\sqrt{3})z+2$, biết z là số phức thỏa $|z-1|\le 2$. **ĐS:** $(C)\colon (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\le 16$

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} w=(1+i\sqrt{3})z+2 &\Leftrightarrow w=(1+i\sqrt{3})(z-1)+3+i\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow w-(3+i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})(z-1)\\ &\Leftrightarrow \left|w-(3+i\sqrt{3})\right|=2\,|z-1|\le 4. \end{aligned}$$

. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn $(C)\colon (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\le 16$ □

BÀI 42. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w=(1+i)z+1$, biết z là số phức thỏa $|z-1|\le 1$. **ĐS:** $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2\le 2$

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} w=(1+i)z+1 &\Leftrightarrow w=(1+i)(z-1)+2+i\\ &\Leftrightarrow w-(2+i)=(1+i)(z-1)\\ &\Leftrightarrow |w-(2+i)|=\sqrt{2}\,|z-1|\le\sqrt{2}. \end{aligned}$$

. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2\le 2$. □

BÀI 43. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện $w=\overline{z}+1-i$, với số phức z thỏa mãn:

① $|3z+i|^2\le z\cdot\overline{z}+9$. **ĐS:** $(C)\colon x^2+y^2-2x+\dfrac{5}{4}y+\dfrac{1}{4}\le 0$

Lời giải.

Đặt $w=x+yi$, $(x;y\in\mathbb{R})$.
Ta có $w=\overline{z}+1-i\Leftrightarrow\overline{z}=(x-1)+(y+1)i\Leftrightarrow z=(x-1)-(y+1)i$.
Khi đó,

$$\begin{aligned} |3z+i|^2\le z\cdot\overline{z}+9 &\Leftrightarrow |3z+i|^2\le|z|^2+9\\ &\Leftrightarrow |3(x-1)-3(y+1)i+i|^2\le(x-1)^2+(y+1)^2+9\\ &\Leftrightarrow 9(x-1)^2+(-3y-2)^2\le(x-1)^2+(y+1)^2+9\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}\le 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là $(C)\colon x^2+y^2-2x+\dfrac{5}{4}y+\dfrac{1}{4}\le 0$. □

② $|2z+i|^2\le 3z\cdot\overline{z}+1$.

ĐS: $(C)\colon x^2+y^2-2x-2y-2\le 0$

Lời giải.

Đặt $w=x+yi$, $(x;y\in\mathbb{R})$.
Ta có $w=\overline{z}+1-i\Leftrightarrow\overline{z}=(x-1)+(y+1)i\Leftrightarrow z=(x-1)-(y+1)i$.
Khi đó,

$$\begin{aligned} |2z+i|^2\le 3z\cdot\overline{z}+1 &\Leftrightarrow |2z+i|^2\le 3\,|z|^2+1\\ &\Leftrightarrow |2(x-1)-2(y+1)i+i|^2\le 3(x-1)^2+3(y+1)^2+1\\ &\Leftrightarrow 4(x-1)^2+(-2y-1)^2\le 3(x-1)^2+3(y+1)^2+1\\ &\Leftrightarrow 4(x^2-2x+1)+4y^2+4y+1\le 3x^2-6x+3+3y^2+6y+4\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2\le 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x-2y-2\le 0$. □

Loại 2. Tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn tính chất K cho trước.

① **Bước 1**. Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z để được mối liên hệ giữa x và y.

② **Bước 2**. Dựa vào mối liên hệ giữa x và y ở bước 1, để tìm $|z|_{\min}$, $|z|_{\max}$.

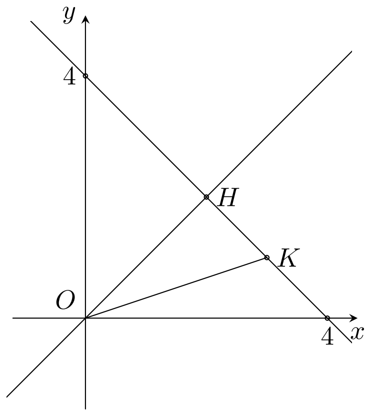
! Thông thường với loại này, người ra đề hay cho tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng hoặc đường tròn. Khi đó, ta có hai hướng xử lý: một là sử dụng phương pháp hình học, hai là sử dụng phương pháp đại số (bất đẳng thức).

BÀI 44. Trong mặt phẳng phức, hãy tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất. Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện:

① $|z-2-4i| = |z-2i|$. **ĐS:** $z = 2+2i$ và $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$

Lời giải.

Đặt $z = x+iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Ta có



$$\begin{aligned}|z-2-4i| = |z-2i| &\Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i| = |x+(y-2)i|\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2 = x^2+(y-2)^2\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16 = x^2+y^2-4y+4\\ &\Leftrightarrow x+y-4=0.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng $\Delta\colon x+y-4=0$. Gọi K là điểm biểu diễn cho số phức z và H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ thì $OK \geq OH$ nên H là điểm biểu diễn cho số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $x+y-4=0$ thì $d\colon x-y=0$.

Khi đó, tọa độ điểm H thỏa mãn $\begin{cases}x+y-4=0\\ x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2.\end{cases}$

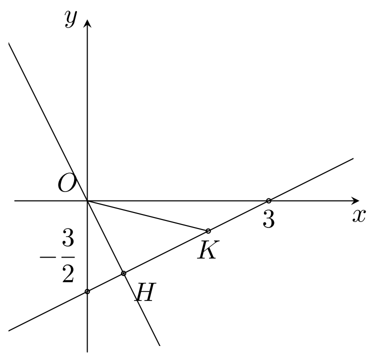
Vậy $z = 2+2i$ và $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$.

□

② $|z-i| = |\overline{z}-2-3i|$. **ĐS:** $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}i$ và $|z|_{\min} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.

Đặt $z = x+iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Ta có,



$$\begin{aligned}|z-i| = |\overline{z}-2-3i| &\Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x-2)+(-y-3)i|\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = (x-2)^2+(-y-3)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2-4x+4+y^2+6y+9\\ &\Leftrightarrow x-2y-3=0.\end{aligned}$$

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng thì $d\colon 2x+y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng $\Delta\colon x-2y-3=0$. Gọi K là điểm biểu diễn cho số phức z và H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ thì $OK \geq OH$ nên H là điểm biểu diễn cho số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Gọi z là số phức có mô-đun nhỏ nhất thì điểm biểu diễn cho z là điểm H có tọa độ thỏa mãn $\begin{cases}x-2y-3=0\\ 2x+y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{3}{5}\\ y = -\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

Vậy $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}i$ và $|z|_{\min} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. □

③ $|iz-3| = |z-2-i|$. **ĐS:** $z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

Lời giải.

Đặt $z = x+iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó,

$$\begin{aligned}|iz-3| = |z-2-i| &\Leftrightarrow |i(x+iy)-3| = |(x+iy)-2-i|\\ &\Leftrightarrow |(-y-3)+ix| = |(x-2)+(y-1)i| \Leftrightarrow (-y-3)^2+x^2 = (x-2)^2+(y-1)^2\\ &\Leftrightarrow y^2+6y+9+x^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1\\ &\Leftrightarrow x+2y+1=0.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng $d\colon x+2y+1=0$.

Ta có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2y-1)^2+y^2}=\sqrt{5\left(y+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}}\geq\sqrt{\dfrac{1}{5}}$.

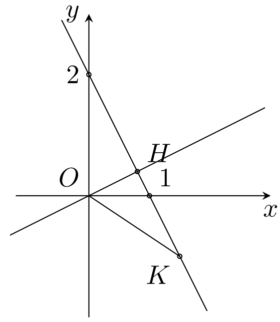
Vậy $|z|_{min}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ khi $y=-\dfrac{2}{5}$, suy ra $x=-\dfrac{1}{5}$.

Vậy $z=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$. □

④ $(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực. **ĐS:** $z=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}$ và $|z|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.

Đặt $z=x+iy$, $(x;y\in\mathbb{R})$. Khi đó,



$$\begin{aligned}(z-1)(\overline{z}+2i)&=[(x-1)+iy]\,[x+(2-y)i]\\&=x(x-1)+(x-1)(2-y)i+xyi-y(2-y)\\&=x(x-1)-y(2-y)+(2x+y-2)i.\end{aligned}$$

Vì $(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực nên $2x+y-2=0$.
Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $2x+y-2=0$ thì $d\colon x-2y=0$.

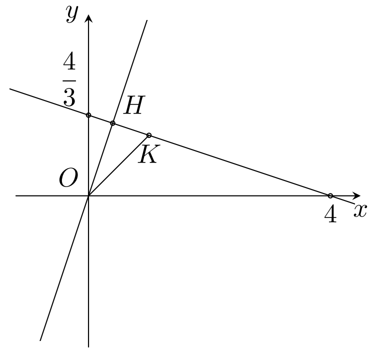
Gọi K là điểm biểu diễn cho số phức z và H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ thì $OK\geq OH$ nên H là điểm biểu diễn cho số phức có mô-đun nhỏ nhất. Gọi z là số phức có mô-đun nhỏ nhất thì tọa độ điểm biểu diễn cho z là điểm H thỏa mãn $\begin{cases}2x+y-2=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\\y=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

Vậy $z=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}$ và $|z|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. □

⑤ $\left|\dfrac{z+1-5i}{\overline{z}+3-i}\right|=1$. **ĐS:** $z=\dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}i$ và $|z|_{\min}=\dfrac{\sqrt{40}}{5}$

Lời giải.

Đặt $z=x+iy$, $(x;y\in\mathbb{R})$. Khi đó,



$$\begin{aligned}\left|\frac{z+1-5i}{\overline{z}+3-i}\right|=1&\Leftrightarrow|z+1-5i|=|\overline{z}+3-i|\\&\Leftrightarrow|(x+1)+(y-5)i|=|(x+3)+(-y-1)i|\\&\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-5)^2=(x+3)^2+(-y-1)^2\\&\Leftrightarrow x+3y-4=0.\end{aligned}$$

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $x+3y-4=0$ thì $d\colon 3x-y=0$.

Gọi z là số phức có mô-đun nhỏ nhất thì tọa độ điểm biểu diễn cho z thỏa $\begin{cases}x+3y-4=0\\3x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

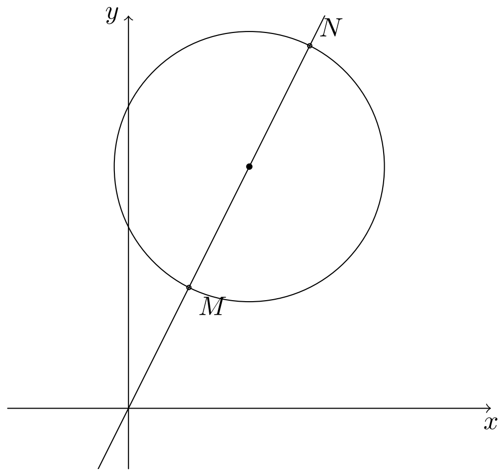
Vậy $z=\dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}i$ và $|z|_{\min}=\dfrac{\sqrt{40}}{5}$. □

BÀI 45. Trong mặt phẳng phức, hãy tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất và mô-đun lớn nhất. Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện:

① $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. **ĐS:** $\begin{cases}z=1+2i,\ |z|_{\min}=\sqrt{5}\\z=3+6i,\ |z|_{\max}=3\sqrt{5}\end{cases}$

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$ $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho z là đường tròn $(C)\colon (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$.
Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và tâm $I(2;4)$ của (C) thì $d\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.
Thế $x = 2t$ và $y = 4t$ vào phương trình của (C) ta được $(2t-2)^2 + (4t-4)^2 = 5 \Leftrightarrow 20t^2 - 40t + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$



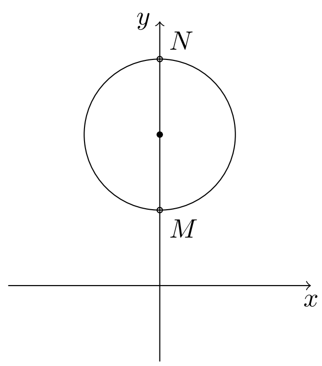
- Với $t = \dfrac{1}{2}$ thì $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Ta có $z = 1 + 2i$ và $|z|_{\min} = \sqrt{5}$.
- Với $t = \dfrac{3}{2}$ thì $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$. Ta có $z = 3 + 6i$ và $|z|_{\max} = 3\sqrt{5}$.

□

② $\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = 1$. **ĐS:** $\begin{cases} z = i, |z|_{\min} = 1 \\ z = 3i, |z|_{\max} = 3 \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó,
$\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = 1 \Leftrightarrow |1+i| \cdot \left|z + \dfrac{2-2i}{1+i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho z là $(C)\colon x^2 + (y-2)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và tâm $I(0;2)$ thì $d\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Thế $x = 0$ và $y = 2t$ vào phương trình của (C) ta có $(2t-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$



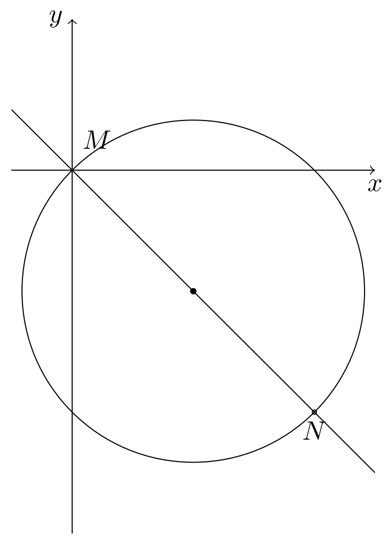
- Với $t = \dfrac{1}{2}$ thì $z = i$, $|z|_{\min} = 1$.
- Với $t = \dfrac{3}{2}$ thì $z = 3i$, $|z|_{\max} = 3$.

□

③ $|z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$. **ĐS:** $\begin{cases} z = 0, \ |z|_{\min} = 0 \\ z = 4 - 4i, \ |z|_{\max} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là $(C)\colon (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$.
Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tâm $I(2;-2)$ của (C) thì $d\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Thế $x = 2t$ và $y = -2t$ vào phương trình của (C) ta được $(2t-2)^2 + (2-2t)^2 = 8 \Leftrightarrow 8t^2 - 16t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2. \end{array}\right.$



- Với $t = 0$ thì $z = 0$, $|z|_{\min} = 0$.
- Với $t = 2$ thì $z = 4 - 4i$, $|z|_{\max} = 4\sqrt{2}$.

□

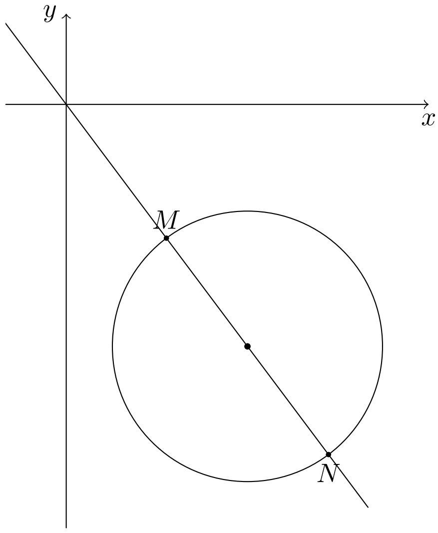
④ $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{|z-3+4i|+1}{2|z-3+4i|+8}\right)=1.$

ĐS: $\left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{3(5+\sqrt{5})}{5}-\dfrac{4(5+\sqrt{5})}{5}i \\ z=\dfrac{3(5-\sqrt{5})}{5}-\dfrac{4(5-\sqrt{5})}{5}i \end{array}\right.$

Lời giải.

Đặt $z=x+iy,\ (x;y\in\mathbb{R})$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{|z-3+4i|+1}{2|z-3+4i|+8}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ & |z-3+4i|+1=\frac{2}{3}|z-3+4i|+\frac{8}{3}\\
\Leftrightarrow\ & 3|z-3+4i|+3=2|z-3+4i|+8\\
\Leftrightarrow\ & 3(x-3)^2+3(y+4)^2+3=2(x-3)^2+2(y+4)^2+8\\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2+(y+4)^2=5.
\end{aligned}$$



Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là $(C)\colon (x-3)^2+(y+4)^2=5$. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tâm $I(3;-4)$ của (C) thì $d\colon \left\{\begin{array}{l} x=3t \\ y=-4t \end{array}\right.,\ (t\in\mathbb{R})$. Thế $x=3t$ và $y=-4t$ vào phương trình của (C) ta có: $(3t-3)^2+(4-4t)^2=5\Leftrightarrow 5t^2-10t+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5+\sqrt{5}}{5} \\ t=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}. \end{array}\right.$

- Với $t=\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}$ thì $z=\dfrac{3(5+\sqrt{5})}{5}-\dfrac{4(5+\sqrt{5})}{5}i,\ |z|_{\max}=5+\sqrt{5}$.
- Với $t=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$ thì $z=\dfrac{3(5-\sqrt{5})}{5}-\dfrac{4(5-\sqrt{5})}{5}i,\ |z|_{\min}=5-\sqrt{5}$.

□

⑤ $|z+1|=\left|\dfrac{z+\overline{z}}{2}+3\right|$.

ĐS: $z=-2,\ |z|_{\min}=2$

Lời giải.

Cách 1.

Đặt $z=x+iy,\ (x;y\in\mathbb{R})$. Khi đó, $|z+1|=\left|\dfrac{z+\overline{z}}{2}+3\right|\Leftrightarrow|(x+1)+iy|=|x+3|\Leftrightarrow 4x-y^2+8=0$.

Khi đó, $|z|^2=x^2+y^2=x^2+4x+8=(x+2)^2+4\geq 4\Rightarrow |z|_{\min}=2$ khi $x=-2,y=0$ nên $z=-2$.

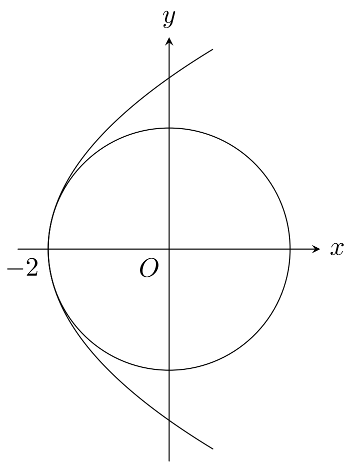
Cách 2.

Đặt $z=x+iy,\ (x;y\in\mathbb{R})$.

Khi đó, $|z+1|=\left|\dfrac{z+\overline{z}}{2}+3\right|\Leftrightarrow|(x+1)+iy|=|x+3|\Leftrightarrow 4x-y^2+8=0$.

Xét đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính bằng 2. Xét hệ $\left\{\begin{array}{l} 4x-y^2+8=0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right.$

Ta được $x^2+4x+4=0\Leftrightarrow x=-2$. Vậy $z=-2,\ |z|_{\min}=2$.



□

⑥ $|z+1+2i|=1$.

ĐS: $\left\{\begin{array}{l} z=-\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}-2\cdot\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}i,\ |z|_{\max}=\sqrt{5}+1 \\ z=-\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}-2\cdot\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}i,\ |z|_{\min}=\sqrt{5}-1 \end{array}\right.$

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z + 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho z là (C): $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tâm $I(-1; -2)$ của (C) thì d: $\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Thế $x = -t$ và $y = -2t$ vào phương trình của (C) ta được $(1 - t)^2 + (2 - 2t)^2 = 1 \Leftrightarrow 5t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{5} \\ t = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{5}. \end{array}\right.$

(a) Với $t = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{5}$ thì $z = -\dfrac{5 + \sqrt{5}}{5} - 2 \cdot \dfrac{5 + \sqrt{5}}{5} i$ và $|z|_{\max} = \sqrt{5} + 1$.

(b) Với $t = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{5}$ thì $z = -\dfrac{5 - \sqrt{5}}{5} - 2 \cdot \dfrac{5 - \sqrt{5}}{5} i$ và $|z|_{\min} = \sqrt{5} - 1$.

□

BÀI 46. Hãy tìm số phức w với $w = z - (3 - 2i)$ có mô-đun nhỏ nhất, trong đó số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |z + 1|$.

ĐS: $|z|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $z = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2} i$

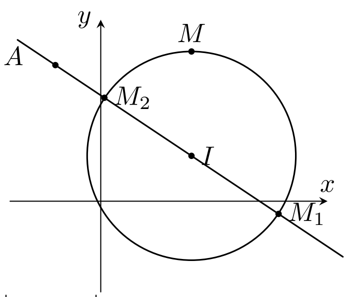
Lời giải.
Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow y = -x$.
Ta có, $w = z - (3 - 2i) = (x - 3) + (y + 2)i = (x - 3) + (2 - x)i \Leftrightarrow |w| = \sqrt{(x - 3)^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{2\left(x - \dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{1}{2}} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $|z|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $z = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2} i$.

□

BÀI 47. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 1$, tìm số phức z sao cho số phức $z - i$ có mô-đun nhỏ nhất.

ĐS: $z = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$

Lời giải.
Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z - 1| = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$.
Ta có kết quả sau: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = r_1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$.
Gọi I, A và M là các điểm biễu diễn cho z_1, z_2 và z. Khi đó, $IA = |z_1 - z_2| = r_2$ nên $\begin{cases} \max P = AM_1 = r_1 + r_2 \\ \min P = AM_2 = |r_1 - r_2|. \end{cases}$



Áp dụng ta có $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $I(1; 0)$, $A(0; 1)$ và $IA = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ nên $|z - i|_{\min} = \left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$.
Ta có đường thẳng qua hai điểm A, I là d: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Thế $x = t$, $y = 1 - t$ vào phương trình $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ta được $(t - 1)^2 + (1 - t)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

- Với $t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $M_1\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AM_1 = \sqrt{\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} + 1$.

- Với $t = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $M_2\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AM_2 = \sqrt{\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} - 1$.

Vậy $z = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$.

□

BÀI 48. Cho các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Tìm số phức w có mô-đun lớn nhất, biết rằng $w = z + 1 + i$.

ĐS: $z = 3 - 3i$

Lời giải.

Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.
Gọi $I(1; -2)$, $A(-1; -1)$. Khi đó phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm I và A là $d \colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$ Thế $x = 1 - 2t$ và $y = -2 + t$ vào phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ ta được $t^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1. \end{array}\right.$

- Với $t = 1$ thì $M_1(-1; -1)$ và $AM_1 = 0$.

- Với $t = -1$ thì $M_2(3; -3)$ và $AM_2 = 2\sqrt{5}$.

Vậy $z = 3 - 3i$.

□

BÀI 49. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $|2z + 1| = |z + \overline{z} + 3|$ sao cho số phức $w = z - 8$ có mô-đun nhỏ nhất.

ĐS: $z = 7 + 4i$ và $z = 7 - 4i$

Lời giải.
Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|2z + 1| = |z + \overline{z} + 3| \Leftrightarrow |(2x+1) + 2yi| = |2x + 3| \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 4y^2 = (2x+3)^2$ $\Leftrightarrow y^2 = 2x + 2$.
Khi đó, $|z - 8|^2 = (x-8)^2 + y^2 = (x-8)^2 + 2x + 2 = x^2 - 14x + 66 = (x-7)^2 + 17 \geq 17$.
Vậy $|z - 8|_{\min} = \sqrt{17}$ khi $x = 7$ và $y = \pm 4$.
Kết luận có hai số phức thỏa là $z = 7 + 4i$ và $z = 7 - 4i$.

□

BÀI 50. Cho số phức $z = x + 2yi$, $(x; y \in \mathbb{R})$ thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$.

ĐS: $\min P = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ và $\max P = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải.
Đặt $z = x + iy$, $(x; y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1$. (1)
Từ $P = x - y$ ta có $y = x - P$ thế vào (1) ta được $x^2 + 4(x - P)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 8xP + 4P^2 - 1 = 0$ (2)
Phương trình (2) có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4P^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Vậy $\min P = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ và $\max P = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

□

BÀI 51. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$, (*). Từ đó hãy tìm số phức z thỏa (*) để phần ảo của z bằng 4.

ĐS: $\left[\begin{array}{l} z = -1 + 4i \\ z = 3 + 4i \end{array}\right.$

Lời giải.
Gọi $z = a + bi$.
Do $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 8$.
Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$ là đường tròn (C) tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.
Do z có phần ảo $b = 4$ nên $(a-1)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 2 \\ a - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -1. \end{array}\right.$
Vậy có hai số phức là $z = -1 + 4i$; $z = 3 + 4i$. □

DẠNG 3.4. Phương trình bậc hai và bậc cao trong số phức

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$, (*) với $a \neq 0$ có biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

1. *Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.*

2. *Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là một căn bậc hai của Δ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ hoặc $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$.*

① *Hệ thức Vi-ét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.*

② *Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức w và tìm như sau:*

+ Bước 1. Đặt $w = a + bi$ với $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ là một căn bậc hai của số phức z.

+ Bước 2. Biến đổi $w^2 = x+yi = (a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)+2abi = x+yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cdots \\ b = \cdots \end{cases}$

+ Bước 3. Kết luận các căn bậc hai của số phức z là $w = a + bi$.

Ta có thể làm tương tự đối với trường hợp căn bậc ba, căn bậc bốn. Ngoài cách tìm căn bậc hai của số phức như trên, ta có thể tách ghép đưa về số chính phương dựa vào hằng đẳng thức.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm căn bậc hai của số phức $z = 16 - 30i$. **ĐS:** $z = \pm 5 \mp 3i$

Lời giải.
Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 16 - 30i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.
Khi đó $(a + bi)^2 = 16 - 30i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 16 - 30i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 16 & (1) \\ 2ab = -30 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow a = -\frac{15}{b}$ thay vào (1), ta có $\frac{225}{b^2} - b^2 = 16 \Rightarrow b^4 + 16b^2 - 225 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 9 \\ b^2 = -25\ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = -3 \\ b = 3. \end{array}\right.$

Với $b = -3 \Rightarrow a = 5$. Với $b = 3 \Rightarrow a = -5$. Vậy $w = -5 + 3i$, $w = 5 - 3i$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $z^2 + 2z + 5 = 0$ trên tập số phức $\mathbb{C}$. **ĐS:** $z = -1 \pm 2i$

Lời giải.
Ta có $\Delta' = -4 = 4i^2$ nên $\delta = 2i$ là một căn bậc hai của Δ'. Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2} = -1 \pm 2i$.
□

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

2 $z = -5 + 12i$. **ĐS:** $w = \pm 2 \pm 3i$

2 $z = 8 + 6i$. **ĐS:** $w = \pm 3 \pm i$

2 $z = 3 - 4i$. **ĐS:** $w = \pm 2 \mp i$

2 $z = 33 - 56i$. **ĐS:** $w = \pm 7 \mp 4i$

2 $z = 4 + 6\sqrt{5}i$. **ĐS:** $w = \pm 3 \pm i\sqrt{5}$

2 $z = -1 - 2\sqrt{6}i$. **ĐS:** $w = \pm\sqrt{2} \mp i\sqrt{3}$

Lời giải.

① $z = -5 + 12i$.
Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = -5 + 12i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.
Khi đó $(a + bi)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 & (1) \\ 2ab = 12 & (2) \end{cases}$
Từ (2) $\Rightarrow a = \frac{6}{b}$ thay vào (1), ta có $\frac{36}{b^2} - b^2 = -5 \Rightarrow b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 9 \\ b^2 = -4\ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = -3 \\ b = 3. \end{array}\right.$
Với $b = -3 \Rightarrow a = -2$. Với $b = 3 \Rightarrow a = 2$. Vậy $w = 2 + 3i$, $w = -2 - 3i$.

② $z = 8 + 6i$.
Đặt $w = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $z = 8 + 6i$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó $(a+bi)^2 = 8+6i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 & (1) \\ 2ab=6 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow a = \dfrac{3}{b}$ thay vào (1), ta có $\dfrac{9}{b^2} - b^2 = 8 \Rightarrow b^4+8b^2-9=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=-9\ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=1. \end{array}\right.$

Với $b=-1 \Rightarrow a=-3$. Với $b=1 \Rightarrow a=3$. Vậy $w=3+i$, $w=-3-i$.

③ $z = 3-4i$.
Đặt $w=a+bi$ là căn bậc hai của số phức $z=3-4i$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó $(a+bi)^2 = 3-4i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 & (1) \\ 2ab=-4 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow a = \dfrac{-2}{b}$ thay vào (1), ta có $\dfrac{4}{b^2} - b^2 = 3 \Rightarrow b^4+3b^2-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=-4\ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=1. \end{array}\right.$

Với $b=-1 \Rightarrow a=2$. Với $b=1 \Rightarrow a=-2$. Vậy $w=2-i$, $w=-2+i$.

④ $z = 33-56i$.
Đặt $w=a+bi$ là căn bậc hai của số phức $z=33-56i$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó $(a+bi)^2 = 33-56i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 33-56i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=33 & (1) \\ 2ab=-56 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow a = \dfrac{-28}{b}$ thay vào (1), ta có $\dfrac{784}{b^2} - b^2 = 33 \Rightarrow b^4+33b^2-784=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=16 \\ b^2=-49\ \ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4 \\ b=4. \end{array}\right.$

Với $b=-4 \Rightarrow a=7$. Với $b=4 \Rightarrow a=-7$. Vậy $w=7-4i$, $w=-7+4i$.

⑤ $z = 4+6\sqrt{5}i$.
Đặt $w=a+bi$ là căn bậc hai của số phức $z=4+6\sqrt{5}i$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó $(a+bi)^2 = 4+6\sqrt{5}i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 4+6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=4 & (1) \\ 2ab=6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow a = \dfrac{3\sqrt{5}}{b}$ thay vào (1), ta có $\dfrac{49}{b^2} - b^2 = 4 \Rightarrow b^4+4b^2-45=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=5 \\ b^2=-9\ \ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-\sqrt{5} \\ b=\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Với $b=-\sqrt{5} \Rightarrow a=-3$. Với $b=\sqrt{5} \Rightarrow a=3$. Vậy $w=-3-\sqrt{5}i$, $w=3+\sqrt{5}i$.

⑥ $z = -1-2\sqrt{6}i$.
Đặt $w=a+bi$ là căn bậc hai của số phức $z=-1-2\sqrt{6}i$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó $(a+bi)^2 = -1-2\sqrt{6}i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = -1-2\sqrt{6}i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-1 & (1) \\ 2ab=-2\sqrt{6} & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow a = \dfrac{-\sqrt{6}}{b}$ thay vào (1), ta có $\dfrac{6}{b^2} - b^2 = -1 \Rightarrow b^4-b^2-6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=3 \\ b^2=-2\ \ (VN) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-\sqrt{3} \\ b=\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Với $b=-\sqrt{3} \Rightarrow a=\sqrt{2}$. Với $b=\sqrt{3} \Rightarrow a=-\sqrt{2}$. Vậy $w=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $w=-\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

□

BÀI 2. Tìm căn bậc ba của các số phức sau:

① $z=-i$. **ĐS:** $w=i$, $w=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}i$

② $z=-27$. **ĐS:** $w=-3$, $w=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

③ $z=2+2i$. **ĐS:** $w=-1+i$, $w=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$, $w=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}i$

④ $z=-46+9i$. **ĐS:** $w=\dfrac{-2-3\sqrt{3}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}i}{2}$, $z=2+3i$, $z=\dfrac{-2+3\sqrt{3}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}i}{2}$

Lời giải.

① $z=-i$.
Đặt $w=a+bi$ là căn bậc ba của số phức $z=-i$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó $(a+bi)^3=-i \Leftrightarrow a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i=-i \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab^2=0 & (1) \\ 3a^2b-b^3=-1 & (2) \end{cases}$

Từ (1), suy ra $a(a^2-3b^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a^2-3b^2=0. \end{array}\right.$

Với $a=0$ thay vào (2), ta có $-b^3=-1 \Leftrightarrow b=1$. Vậy $w=i$.

Với $a^2-3b^2=0 \Leftrightarrow a^2=3b^2$ thay vào (2), ta có $9b^3-b^3=-1 \Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow a^2=\dfrac{3}{4} \Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $w=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

② $z=-27$.
Đặt $w=a+bi$ là căn bậc ba của số phức $z=-27$ với $a,b\in\mathbb{R}$.
Khi đó $(a+bi)^3=-27 \Leftrightarrow a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i=-27 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab^2=-27 & (1)\\ 3a^2b-b^3=0 & (2)\end{cases}$

Từ (2), suy ra $b(3a^2-b^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0\\ 3a^2-b^2=0.\end{array}\right.$

Với $b=0$ thay vào (1), ta có $a^3=-27 \Leftrightarrow a=-3$. Vậy $w=-3$.

Với $3a^2-b^2=0 \Leftrightarrow b^2=3a^2$ thay vào (1), ta có $a^3-9a^3=-27 \Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2} \Rightarrow b^2=\dfrac{27}{4} \Rightarrow b=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $w=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

③ $z=2+2i$.
Đặt $\begin{cases} x=\sqrt[3]{2+2i}\\ y=\sqrt[3]{2-2i}.\end{cases}$
Ta có $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=4+6(x+y)$.

Suy ra ta có phương trình $(x+y)^3-6(x+y)-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-2\\ x+y=1+\sqrt{3}\\ x+y=1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Mặt khác $xy=\sqrt[3]{2+2i}\cdot\sqrt[3]{2-2i}=2$.

+ Với $x+y=-2$ và $xy=2$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2+2X+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X=-1+i\\ X=-1-i.\end{array}\right.$

 Kiểm tra ta thấy $w=\sqrt[3]{2+2i}=-1+i$.

+ Với $x+y=1+\sqrt{3}$ và $xy=2$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-(1+\sqrt{3})X+2=0$.
 Ta có $\Delta=(1+\sqrt{3})^2-8=-4+2\sqrt{3}=(4-2\sqrt{3})i^2=(\sqrt{3}-1)^2i^2$.

 Do đó ta có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} X=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i\\ X=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i.\end{array}\right.$

 Kiểm tra ta thấy $w=\sqrt[3]{2+2i}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

+ Với $x+y=1-\sqrt{3}$ và $xy=2$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2+(1-\sqrt{3})X+2=0$.
 Ta có $\Delta=(1-\sqrt{3})^2-8=-8-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2i^2$.

 Do đó ta có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} X=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i\\ X=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i.\end{array}\right.$

 Kiểm tra ta thấy $w=\sqrt[3]{2+2i}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$.

④ $z=-46+9i$.
Đặt $\begin{cases} x=\sqrt[3]{-46+9i}\\ y=\sqrt[3]{-46-9i}.\end{cases}$
Ta có $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=-92+39(x+y)$.

Suy ra ta có phương trình $(x+y)^3-39(x+y)+92=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=4\\ x+y=-2+3\sqrt{3}\\ x+y=-2-3\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Mặt khác $xy=\sqrt[3]{-46+9i}\cdot\sqrt[3]{-46-9i}=13$.

+ Với $x+y=4$ và $xy=13$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-4X+13=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X=2+3i\\ X=2-3i.\end{array}\right.$

 Kiểm tra ta thấy $w=\sqrt[3]{-46+9i}=2+3i$.

+ Với $x+y=-2+3\sqrt{3}$ và $xy=13$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-(-2+3\sqrt{3})X+13=0$.
Ta có $\Delta=31-12\sqrt{3}-52=-21-12\sqrt{3}=(21+12\sqrt{3})i^2$.
Do đó ta có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} X=\dfrac{-2+3\sqrt{3}+\sqrt{21+12\sqrt{3}}i}{2} \\ X=\dfrac{-2+3\sqrt{3}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}i}{2}. \end{array}\right.$
Kiểm tra ta thấy $w=\sqrt[3]{-46+9i}=\dfrac{-2+3\sqrt{3}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}i}{2}$.

+ Với $x+y=-2-3\sqrt{3}$ và $xy=13$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2+(2+3\sqrt{3})X+13=0$.
Ta có $\Delta=31+12\sqrt{3}-52=-21+12\sqrt{3}=(21-12\sqrt{3})i^2$.
Do đó ta có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} X=\dfrac{-2-3\sqrt{3}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}i}{2} \\ X=\dfrac{-2-3\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}i}{2}. \end{array}\right.$
Kiểm tra ta thấy $w=\sqrt[3]{-46+9i}=\dfrac{-2-3\sqrt{3}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}i}{2}$.

□

BÀI 3. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

① $2x^2-5x+4=0$. **ĐS:** $x_{1,2}=\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$

② $x^2-4x+7=0$. **ĐS:** $x_{1,2}=2\pm i\sqrt{3}$

③ $x^2-2x+2=0$. **ĐS:** $x_{1,2}=1\pm i$

④ $8z^2-4z+1=0$. **ĐS:** $z_{1,2}=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{4}i$

⑤ $2z^2-iz+1=0$. **ĐS:** $z_1=i$, $z_2=-\dfrac{1}{2}i$

⑥ $(z-i)^2+4=0$. **ĐS:** $z_1=3i$, $z_2=-i$

⑦ $z^4+7z^2+10=0$. **ĐS:** $z_{1,2}=\pm i\sqrt{2}$, $z_{3,4}=\pm i\sqrt{5}$

⑧ $z^4+z^2-6=0$. **ĐS:** $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $z_{3,4}=\pm i\sqrt{3}$

⑨ $(z+i)^4+4z^2=0$. **ĐS:** $z_{1,2}=1$, $z_{3,4}=(-2\pm\sqrt{3})i$

Lời giải.

① $2x^2-5x+4=0$.
Ta có $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot4=-7=7i^2$ nên $\delta=\sqrt{7}i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{7}i}{4}=\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$.

② $x^2-4x+7=0$.
Ta có $\Delta'=(-2)^2-1\cdot7=-3=3i^2$ nên $\delta=\sqrt{3}i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}i$.

③ $x^2-2x+2=0$.
Ta có $\Delta'=(-1)^2-1\cdot2=-1=i^2$ nên $\delta=i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $x_{1,2}=1\pm i$.

④ $8z^2-4z+1=0$.
Ta có $\Delta'=(-2)^2-8\cdot1=-4=4i^2$ nên $\delta=2i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2}=\dfrac{2\pm2i}{8}=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{4}i$.

⑤ $2z^2-iz+1=0$.
Ta có $\Delta=(-i)^2-4\cdot2\cdot1=-9=9i^2$ nên $\delta=3i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_1=\dfrac{i+3i}{4}=i$ và $z_2=\dfrac{i-3i}{4}=-\dfrac{1}{2}i$.

⑥ $(z-i)^2+4=0$.
Ta có $(z-i)^2+4=0\Leftrightarrow(z-i)^2=4i^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z-i=2i \\ z-i=-2i \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=3i \\ z=-i. \end{array}\right.$

⑦ $z^4+7z^2+10=0$.

Đặt $t=z^2$, khi đó phương trình trở thành $t^2+7t+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-5. \end{array}\right.$

Với $t=-2 \Rightarrow z^2=-2 \Rightarrow z^2=2i^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2}i$.
Với $t=-5 \Rightarrow z^2=-5 \Rightarrow z^2=5i^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{5}i$.

⑧ $z^4+z^2-6=0$.

Đặt $t=z^2$, khi đó phương trình trở thành $t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3. \end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow z^2=2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2}$.
Với $t=-3 \Rightarrow z^2=-3 \Rightarrow z^2=3i^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{3}i$.

⑨ $(z+i)^4+4z^2=0$.

Ta có $(z+i)^2+4z^2=0 \Leftrightarrow (z+i)^4=4i^2z^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z+i)^2=2iz \\ (z+i)^2=-2iz \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2-1=0 & (1) \\ z^2+4iz-1=0 & (2) \end{array}\right.$

Theo (1) thì $z^2-1=0 \Leftrightarrow z^2=1 \Leftrightarrow z_{1,2}=\pm 1$.
Theo (2), ta có $\Delta'=(2i)^2+1=-3=3i^2$ nên $\delta=\sqrt{3}i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm phức phân biệt là $z_{3,4}=-2i\pm\sqrt{3}i=(-2\pm\sqrt{3})i$.

□

BÀI 4. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

① $\dfrac{4z-3-7i}{z-i}=z-2i$. **ĐS:** $z_1=3+i$, $z_2=1+2i$

② $z^2-(1+i)z+6+3i=0$. **ĐS:** $z_1=1-2i$, $z_2=3i$

③ $z^2+3(1+i)z+5i=0$. **ĐS:** $z_1=-1-2i$, $z_2=-2-i$

④ $z^2+(1+i)z-2-i=0$. **ĐS:** $z_1=1$, $z_2=-2-i$

⑤ $z^2-8(1-i)z+63-16i=0$. **ĐS:** $z_1=5-12i$, $z_2=3+4i$

⑥ $(2-3i)z^2+(4i-3)z+1-i=0$. **ĐS:** $z_1=1$, $z_2=-\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i$

⑦ $2(1+i)z^2-4(2-4i)z-10+14i=0$. **ĐS:** $z_1=-1$, $z_2=-1-6i$

Lời giải.

① $\dfrac{4z-3-7i}{z-i}=z-2i$.
Ta có $\dfrac{4z-3-7i}{z-i}=z-2i \Rightarrow z^2-(3i+4)z+1+7i=0$.
Khi đó $\Delta=(3i+4)^2-4(1+7i)=3-4i$ nên $\delta=2-i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z=\dfrac{3i+4+2-i}{2}=3+i$ hoặc $z=\dfrac{3i+4-2+i}{2}=1+2i$.

② $z^2-(1+i)z+6+3i=0$.
Ta có $\Delta=(1+i)^2-4(6+3i)=1+2i-1-24-12i=-24-10i$.
Gọi $\delta=1-5i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=\dfrac{1+i+1-5i}{2}=1-2i$ hoặc $z_2=\dfrac{1+i-1+5i}{2}=3i$.

③ $z^2+3(1+i)z+5i=0$.
Ta có $\Delta=9(1+i)^2-4\cdot 5i=18i-20i=-2i$.
Gọi $\delta=1-i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=\dfrac{-3-3i+1-i}{2}=-1-2i$ hoặc $z_2=\dfrac{-3-3i-1+i}{2}=-2-i$.

④ $z^2+(1+i)z-2-i=0$.
Ta có $\Delta=(1+i)^2-4(-2-i)=1+2i-1+8+4i=8+6i$.
Gọi $\delta=3+i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=\dfrac{-1-i+3+i}{2}=1$ hoặc $z_2=\dfrac{-1-i-3-i}{2}=-2-i$.

⑤ $z^2-8(1-i)z+63-16i=0$.
Ta có $\Delta'=16(1-i)^2-(63-16i)=16-32i-16-63+16i=-63-16i$.
Gọi $\delta=1-8i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=4(1-i)+1-8i=5-12i$ hoặc $z_2=4(1-i)-1+8i=3+4i$.

⑥ $(2-3i)z^2+(4i-3)z+1-i=0$.
Ta có $\Delta=(4i-3)^2-4(2-3i)(1-i)=-16-24i+9+4+20i=-3-4i$.
Gọi $\delta=1-2i$ là một căn bậc hai của Δ.
Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1=\dfrac{-4i+3+1-2i}{2(2-3i)}=\dfrac{4-6i}{4-6i}=1$ hoặc $z_2=\dfrac{-4i+3-1+2i}{2(2-3i)}=-\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i$.

⑦ $2(1+i)z^2-4(2-4i)z-10+14i=0$.
Ta có $a-b+c=2+2i+8-16i-10+14i=0$.
Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1=-1$ và $z_2=-\dfrac{-10+14i}{2+2i}=-1-6i$.

□

BÀI 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.
ĐS: $A=20$

Lời giải.
Ta có $\Delta'=-9=9i^2$ nên $\delta=3i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Khi đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=-1-3i$ và $z_2=-1+3i$.
Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=20$. □

BÀI 6. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-4z+11=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^{2012}}$.
ĐS: $M=\dfrac{11}{2^{2012}}$

Lời giải.
Ta có $\Delta'=4-22=-18=18i^2$ nên $\delta=3\sqrt{2}i$ là một căn bậc hai của Δ'.
Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $z_1=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ và $z_2=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$.
Do đó $(z_1+z_2)^{2012}=2^{2012}$. Vậy $M=\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^{2012}}=\dfrac{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}}{2^{2012}}=\dfrac{11}{2^{2012}}$. □

BÀI 7. Tìm số phức z và w thỏa $z+w=4-i$ và $z^3+w^3=7+28i$. **ĐS:** $\begin{cases}z=3+i\\w=1-2i\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}z=1-2i\\w=3+i\end{cases}$

Lời giải.
Ta có $z^3+w^3=7+28i\Leftrightarrow(z+w)(z^2+w^2-zw)=7+28i\Leftrightarrow z^2+w^2-zw=\dfrac{7+28i}{4-i}=7i$.
Mặt khác $z^2+w^2-zw=7i\Leftrightarrow(z+w)^2-3zw=7i\Leftrightarrow zw=\dfrac{7i-(4-i)^2}{-3}=5-5i$.
Khi đó z và w là hai nghiệm của phương trình $X^2-(4-i)X+5-5i=0$.
Ta có $\Delta=(4-i)^2-4(5-5i)=-5+12i$ nên $\delta=2+3i$ là một căn bậc hai của Δ.
Khi đó phương trình có hai nghiệm $X=\dfrac{4-i+2+3i}{2}=3+i$ hoặc $X=\dfrac{4-i-2-3i}{2}=1-2i$.
Vậy $\begin{cases}z=3+i\\w=1-2i\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}z=1-2i\\w=3+i\end{cases}$. □

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

> **!** Trong giải phương trình bậc cao, nếu đề cho phương trình có một nghiệm thuần ảo, ta thế $z=bi$ vào phương trình và giải tìm $b\Rightarrow z=bi$. Do có nghiệm $z=bi$ nên chia Hoocner để đưa về phương trình bậc thấp hơn mà đã biết cách giải để tìm nghiệm còn lại. Còn nếu đề bài cho biết có 1 nghiệm thực. Khi đó cần đến khả năng nhẩm nghiệm của phương trình bậc cao (nếu có i thì ta sẽ nhẩm nghiệm sao cho triệt tiêu đi i).

BÀI 8. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thuần ảo.

① $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=0$. **ĐS:** $z=2i$ hoặc $z=1\pm i\sqrt{3}$

② $z^3+(1+i)z^2+(3+i)z+3i=0$. **ĐS:** $z=-i$ hoặc $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{11}}{2}$

③ $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0$. **ĐS:** $z=2i$ hoặc $z=-1\pm 2i$

Lời giải.

① $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=0$.
Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo là $z=bi$ nên ta có:
$(bi)^3-2(1+i)(bi)^2+4(1+i)bi-8i=0\Leftrightarrow -b^3i+2b^2+2b^2i+4bi-4b-8i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2-4b=0 \\ -b^3+2b^2+4b-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b=2.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $(z-2i)(z^2-2z+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-2i=0 \\ z^2-2z+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=1\pm i\sqrt{3}. \end{array}\right.$

② $z^3+(1+i)z^2+(3+i)z+3i=0$.
Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo là $z=bi$ nên ta có:
$(bi)^3+(1+i)(bi)^2+(3+i)bi+3i=0 \Leftrightarrow -b^3i-b^2-b^2i+3bi-b+3i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2-b=0 \\ -b^3-b^2+3b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b=-1.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $(z+i)(z^2+z+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i=0 \\ z^2+z+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i \\ z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{11}}{2}. \end{array}\right.$

③ $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0$.
Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo là $z=bi$ nên ta có:
$(bi)^3+(2-2i)(bi)^2+(5-4i)bi-10i=0 \Leftrightarrow -b^3i-2b^2+2b^2i+5bi+4b-10i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2+4b=0 \\ -b^3+2b^2+5b-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=\pm\sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b=2.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $(z-2i)(z^2+2z+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-2i=0 \\ z^2+2z+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=-1\pm 2i. \end{array}\right.$

□

BÀI 9. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thực.

① $2z^3-5z^2+3z+3+(2z+1)i=0$. **ĐS:** $z=-\dfrac{1}{2}$, $z=1+i$, $z=2-i$

② $z^3-2(1+i)z^2+3iz+1-i=0$. **ĐS:** $z=1$, $z=i$, $z=1+i$

Lời giải.

① $2z^3-5z^2+3z+3+(2z+1)i=0$.
Vì $2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1\right)i=0$ nên $z=-\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
Khi đó phương trình đã cho trở thành $(2z+1)(2z^2-6z+6+2i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2z+1=0 & (1) \\ 2z^2-6z+6+2i=0 & (2). \end{array}\right.$
Với (1), ta có $2z+1=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}$.
Với (2), thì $\Delta'=9-2(6+2i)=-3-4i$.
Khi đó gọi δ là căn bậc hai của Δ' thì $\delta=1-2i$.
Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phức phân biệt $z=\dfrac{3+1-2i}{2}=2-i$ và $z=\dfrac{3-1+2i}{2}=1+i$.

② $z^3-2(1+i)z^2+3iz+1-i=0$.
Vì $1+(-2-2i)+3i+1-i=0$ nên phương trình có một nghiệm là $z=1$.
Khi đó phương trình đã cho trở thành $(z-1)(z^2-(1+2i)z+i-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z-1=0 & (1) \\ z^2-(1+2i)z+i-1=0 & (2). \end{array}\right.$
Với (1) thì $z-1=0 \Leftrightarrow z=1$.
Với (2) thì $\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z=\dfrac{1+2i+1}{2}=1+i$ và $z=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$.

□

BÀI 10. Giải các phương trình sau trên tập số phức $\mathbb{C}$

① $z^3-(2i-1)z^2+(3-2i)z+3=0$ **ĐS:** $z=-1$; $z=-i$; $z=3i$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z^3-(2i-1)z^2+(3-2i)z+3=0 &\Leftrightarrow (z^3+z^2)-2iz(z+1)+3(z+1)=0\\ &\Leftrightarrow (z+1)(z^2-2iz+3)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1\\ z=-i\\ z=3i. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $z=-1$, $z=-i$, $z=3i$. □

② $iz^3+z^2-(1+4i)z-2=0$ **ĐS:** $z=2$; $z=\dfrac{-2\pm\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} iz^3+z^2-(1+4i)z-2=0 &\Leftrightarrow (iz^3-4iz)+(z^2-z-2)=0\\ &\Leftrightarrow iz(z-2)(z+2)+(z-2)(z+1)=0\\ &\Leftrightarrow (z-2)[iz(z+2)+(z+1)]=0\\ &\Leftrightarrow (z-2)[iz^2+(2i+1)z+1]=0. \end{aligned}$$

— Với $z-2=0\Leftrightarrow z=2$.

— Với $iz^2+(2i+1)z+1=0\Leftrightarrow z=\dfrac{-2\pm\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

Vậy phương trình có nghiệm là $z=2$, $z=\dfrac{-2\pm\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. □

③ $z^4-z^3+\dfrac{z^2}{2}+z+1=0$ **ĐS:** $z=1\pm i$; $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

Lời giải.

Ta thấy $z=0$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó phương trình tương đương với

$$z^2+\frac{1}{z^2}-\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}=0. \tag{1}$$

Đặt $w=z-\dfrac{1}{z}\Rightarrow z^2+\dfrac{1}{z^2}=w^2+2$. Thay vào phương trình (1) ta được $w^2-w+\dfrac{5}{2}=0\Leftrightarrow w=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{3}{2}i$.

— Với $w=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$, ta có $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\Leftrightarrow z^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)z-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=1+i\\ z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i. \end{array}\right.$

— Với $w=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$, ta có $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\Leftrightarrow z^2-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right)z-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=1-i\\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $z=1\pm i$, $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$. □

④ $4z^4-(6+10i)z^3+(15i-8)z^2+(6+10i)z+4=0$ **ĐS:** $z\in\left\{-\dfrac{1}{2};\ 2;\ 2i;\ \dfrac{i}{2}\right\}$

Lời giải.

Ta thấy $z=0$ không là nghiệm của phương trình, do đó ta có

$$4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-(6+10i)\left(z-\frac{1}{z}\right)+(15i-8)=0. \tag{1}$$

Đặt $w=z-\dfrac{1}{z}$, thay vào (1) ta được $4(w^2+2)-(6+10i)w+15i-8=0\Leftrightarrow 4w^2-(6+10i)w+15i=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} w=\dfrac{3}{2}\\ w=\dfrac{5i}{2}. \end{array}\right.$

— Với $w=\dfrac{3}{2}$, ta có $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow z^2-\dfrac{3}{2}z-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{2}\\ z=2.\end{array}\right.$

— Với $w=\dfrac{5i}{2}$, ta có $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{5i}{2}\Leftrightarrow z^2-\dfrac{5i}{2}z-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{i}{2}\\ z=2i.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $z=\pm 1-3i$, $z=(-3\pm 3\sqrt{2})i$. □

⑤ $(z-i)(z+2i)(z+4i)(z+7i)=34$ **ĐS:** $z=\pm 1-3i$; $z=(-3\pm 3\sqrt{2})i$

Lời giải.

Ta có $(z-i)(z+2i)(z+4i)(z+7i)=34\Leftrightarrow (z^2+6iz+7)(z^2+6iz-8)=34$.

Đặt $w=z^2+6iz+7$, ta có $w(w-15)=34\Leftrightarrow w^2-15w-34=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=17\\ w=-2.\end{array}\right.$

— Với $w=17$, ta có $z^2+6iz+7=17\Leftrightarrow z^2+6iz-10=0\Leftrightarrow z=\pm 1-3i$.

— Với $w=-2$, ta có $z^2+6iz+7=-2\Leftrightarrow z^2+6iz+9=0\Leftrightarrow z=(-3\pm 3\sqrt{2})i$.

Vậy phương trình có nghiệm là $z=\pm 1-3i$, $z=(-3\pm 3\sqrt{2})i$. □

⑥ $(z^2+3z+2)(z^2+11z+30)=60$ **ĐS:** $z\in\left\{0;\ -7;\ -\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$

Lời giải.

Ta có $(z^2+3z+2)(z^2+11z+30)=60\Leftrightarrow (z+1)(z+2)(z+5)(z+6)=60\Leftrightarrow (z^2+7z+6)(z^2+7z+10)=60$.
Đặt $w=z^2+7z+8$, ta có $(w+2)(w-2)=60\Leftrightarrow w^2=64\Leftrightarrow w=\pm 8$.

— Với $w=8$, ta có $z^2+7z+8=8\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0\\ z=-7.\end{array}\right.$

— Với $w=-8$, ta có $z^2+7z+8=-8\Leftrightarrow z^2+7z+16=0\Leftrightarrow z=-\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$.

Vậy phương trình có nghiệm là $z=0$, $z=-7$, $z=-\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$. □

DẠNG 3.5. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$. *Đặt* $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. *Khi đó*

① *Dạng lượng giác của số phức* z *là* $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

② *Một acgument của số phức* z *là* φ.

③ $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.

④ $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

VÍ DỤ 1 (B-2012). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2\sqrt{3}iz-4=0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2. **ĐS:** $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ và $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Lời giải.

Ta có $z^2-2\sqrt{3}iz-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=1+\sqrt{3}i\\ z_2=-1+\sqrt{3}i\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\\ z_2=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).\end{array}\right.$ □

VÍ DỤ 2. Viết số phức z dưới dạng lượng giác, biết rằng $|z-1|=|z-i\sqrt{3}|$ và $i\bar{z}$ có một acgument bằng $\dfrac{\pi}{6}$.
ĐS: $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ và $z=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Lời giải.
Gọi $z = a + bi$ (với $a,\ b \in \mathbb{R}$). Ta có

$|z-1| = |z-i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |(a-1)+bi| = |a+(b-\sqrt{3})i| \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2 = a^2+(b-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 2a-1 = \sqrt{3}(2b-\sqrt{3}) \Leftrightarrow a = \sqrt{3}b-1.$

Ta lại có $i\overline{z} = b + ai \Rightarrow \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}a.$

— Với $b = \sqrt{3}a$, ta có $a = 3a - 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Do đó $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

— Với $b = -\sqrt{3}a$, ta có $a = -3a - 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$. Do đó $b = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Vậy $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ và $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. □

VÍ DỤ 3. Tìm số phức z, biết rằng $|1-2z| = |i-2\overline{z}|$ và $\dfrac{z+3}{z-3}$ có một acgument bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

ĐS: $z = \dfrac{3\pm3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\pm3\sqrt{3}}{2}i$ và $z = \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\mp3\sqrt{3}}{2}i$

Lời giải.
Gọi $z = a + bi$ (với $a,\ b \in \mathbb{R}$). Ta có

$|1-2z| = |i-2\overline{z}| \Leftrightarrow |(1-2a)-2bi| = |-2a+(2b+1)i| \Leftrightarrow (2a-1)^2+4b^2 = 4a^2+(2b+1)^2 \Leftrightarrow 4a-1 = -4b-1 \Leftrightarrow a = -b.$

Ta lại có $\dfrac{z+3}{z-3} = \dfrac{(a+3)+bi}{(a-3)+bi} = \dfrac{[(a+3)+bi][(a-3)-bi]}{(a-3)^2+b^2} = \dfrac{(a^2+b^2-9)-6bi}{(a-3)^2+b^2}$. Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2a^2-9}{\sqrt{(2a^2-9)^2+36a^2}} \Leftrightarrow (2a^2-9)^2 = 36a^2 \Leftrightarrow 2a^2-9 = \pm6a.$$

— Với $2a^2 - 9 = 6a \Leftrightarrow 2a^2 - 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{3\pm3\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $a = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = -\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}i$.
- Nếu $a = \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = -\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}i$.

— Với $2a^2 - 9 = -6a \Leftrightarrow 2a^2 + 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $a = \dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}i$.
- Nếu $a = \dfrac{-3-3\sqrt{3}}{2}$ thì $b = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{-3-3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn là $z = \dfrac{3\pm3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\pm3\sqrt{3}}{2}i$ và $z = \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\mp3\sqrt{3}}{2}i$. □

VÍ DỤ 4. Tìm số phức z, biết rằng $|z| = |2\overline{z} - \sqrt{3} + i|$ và $\dfrac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}$ có một acgument bằng $-\dfrac{\pi}{6}$.

ĐS: $z = \sqrt{3} + i$

Lời giải.
Gọi $z = a + bi$ (với $a,\ b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z| = |2\overline{z}-\sqrt{3}+i| \Leftrightarrow |a+bi| = |(2a-\sqrt{3})+(-2b+1)i| \Leftrightarrow a^2+b^2 = (2a-\sqrt{3})^2+(2b-1)^2 \Leftrightarrow 3a^2+3b^2-4\sqrt{3}a-4b+4 = 0. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i} &= \frac{[(1+i)(a+bi)][1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i]}{8}\\ &= \frac{[(a-b)+(a+b)i][1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i]}{8}\\ &= \frac{(a+\sqrt{3}b)+(-\sqrt{3}a+b)i}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}a+b}{a+\sqrt{3}b} \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}a+b}{a+\sqrt{3}b} \Rightarrow a = \sqrt{3}b.$
Thay vào (1) ta được
$$9b^2+3b^2-12b^2-4b+4=0 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow a=\sqrt{3}.$$
Vậy $z=\sqrt{3}+i$. □

VÍ DỤ 5. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1|=|z-3|$ và một acgument của $z-3$ bằng một acgument của $z+3$ cộng với $\dfrac{\pi}{2}$. **ĐS:** $z=2+i\sqrt{5}$

Lời giải.
Gọi $z=a+bi$ (với $a,\ b\in\mathbb{R}$). Ta có
$$|z-1|=|z-3| \Leftrightarrow |(a-1)+bi|=|(a-3)+bi| \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2=(a-3)^2+b^2 \Leftrightarrow 2(2a-4)=0 \Leftrightarrow a=2.$$
Lại có $z-3=(a-3)+bi$ và $z+3=(a+3)+bi$.
Gọi $\varphi_1,\ \varphi_2$ lần lượt là acgument của $z-3$ và $z+3$. Theo đề bài ta có
$$\varphi_1=\varphi_2+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\varphi_1=\sin\left(\varphi_2+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin\varphi_1=\cos\varphi_2.$$
Do vậy
$$\frac{b}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}=\frac{a+3}{\sqrt{(a+3)^2+b^2}} \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{5}{\sqrt{25+b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ b\sqrt{25+b^2}=5\sqrt{1+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow b=\sqrt{5}.$$
Vậy $z=2+i\sqrt{5}$. □

VÍ DỤ 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z|+(1+i\sqrt{3})z=3$. Hãy tìm mô-đun của số phức $w=z+z^2+z^{123}$. **ĐS:** $|w|=2$

Lời giải.
Gọi $z=a+bi$ (với $a,\ b\in\mathbb{R}$). Ta có
$$|z|+(1+i\sqrt{3})z=3 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}+(1+i\sqrt{3})(a+bi)=3 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2+b^2}+a-b\sqrt{3})+(a\sqrt{3}+b)i=3.$$
Do đó $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}+a-b\sqrt{3}=3 \\ b+a\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}+a-b\sqrt{3}=3 \\ b=-a\sqrt{3}. \end{cases}$

Suy ra $2|a|+4a=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6a=3 \text{ (nếu } a\geq 0) \\ 2a=3 \text{ (nếu } a\leq 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \text{ (thỏa mãn } a\geq 0) \\ a=\dfrac{3}{2} \text{ (không thỏa mãn } a\leq 0). \end{array}\right.$

Với $a=\dfrac{1}{2}$ thì $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Khi đó
$$w=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{123\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{123\pi}{3}\right)=-1-\sqrt{3}i \Rightarrow |w|=2.$$
Vậy $|w|=2$. □

VÍ DỤ 7. Tìm acgument âm lớn nhất của số phức $z=(1+i\sqrt{3})^{10}$. **ĐS:** $\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$

Lời giải.
Ta có $1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^{10}=2^{10}\left(\cos\dfrac{10\pi}{3}+i\sin\dfrac{10\pi}{3}\right)$.
Ta thấy $\dfrac{10\pi}{3}+k2\pi<0 \Rightarrow k<-\dfrac{5}{3}$. Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=-2,\ -3,\ldots$. Do đó, acgument âm lớn nhất của số phức $z=(1+i\sqrt{3})^{10}$ là $-\dfrac{2\pi}{3}$. □

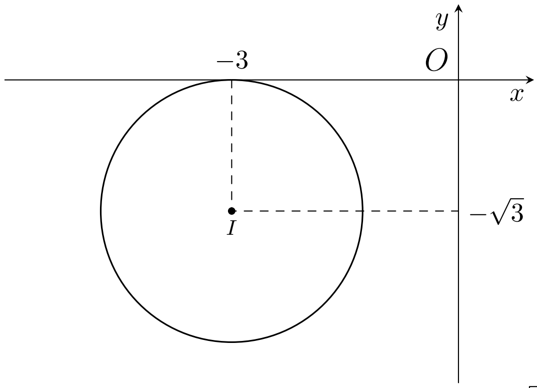
VÍ DỤ 8. Tìm số phức z thỏa mãn $|z+3+i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ và có acgument dương nhỏ nhất. **ĐS:** $z=-3$

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ (với $a,\ b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z + 3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (a+3)^2 + (b+\sqrt{3})^2 = 3.$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, khi đó $M(a;b)$ nằm trên đường tròn tâm $I(-3;-\sqrt{3})$ có bán kính $R = \sqrt{3}$. Dễ thấy đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{3}$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm $M_0(-3;0)$.
Vì acgument của z là góc tạo bởi $\overrightarrow{OM}$ và tia Ox nên điểm biểu diễn số phức có acgument dương nhỏ nhất trùng với điểm M_0, hay $z = -3$.



□

VÍ DỤ 9. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn $z = \left(\dfrac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i}\right)^n$ là số thực. **ĐS:** $n = 6k, 1 \le k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.
Ta có $\dfrac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i} = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3} - i)(1 + i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$.
Suy ra $z = \left(\dfrac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}$.
Do đó, để z là số thực thì $\sin\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k$. Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $k \ge 1$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 10. Cho số phức $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^n$ là số thực và số phức $z_2 = \left(\dfrac{5 - i}{2 - 3i}\right)^{n+2}$ là số ảo. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất. **ĐS:** $n = 12$

Lời giải.
Ta có $\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3} - i)(1 + i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}$.
Do đó, để z là số thực thì $\sin\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. (1)
Mà $\dfrac{5 - i}{2 - 3i} = \dfrac{(5 - i)(2 + 3i)}{13} = \dfrac{13 + 13i}{13} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z_2 = 2^{\frac{n+2}{2}}\left(\cos\dfrac{(n+2)\pi}{4} + i\sin\dfrac{(n+2)\pi}{4}\right)$.
Để z_2 là số thuần ảo thì $\cos\dfrac{(n+2)\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(n+2)\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = 4k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 12$. □

VÍ DỤ 11. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tìm số phức $w = \left(\dfrac{1 + \sqrt{3} - z}{2 + z}\right)^7$.

ĐS: $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2^4}\left(\cos\dfrac{\pm\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pm\pi}{12}\right)$

Lời giải.
Ta có $z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

— Với $z = 1 + i\sqrt{3}$, ta có

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3} - z}{2 + z} = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{1 - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 - i)(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1 - i(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

Gọi φ là acgument của số phức z_1, khi đó $\tan\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\dfrac{7\pi}{12}$. Suy ra $\varphi = \dfrac{7\pi}{12}$. Từ đó ta có

$$z_1 = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \Rightarrow w = \frac{\sqrt{2}}{2^4}\left(\cos\frac{49\pi}{12} + i\sin\frac{49\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2^4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

— Với $z = 1 - i\sqrt{3}$, ta có

$$z_2 = \frac{1+\sqrt{3}-z}{2+z} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1+i(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Gọi φ là acgument của số phức z_2, khi đó $\tan\varphi = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}} = -\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Suy ra $\varphi = -\dfrac{7\pi}{12}$. Từ đó ta có

$$z_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-7\pi}{12}+i\sin\frac{-7\pi}{12}\right) \Rightarrow w = \frac{\sqrt{2}}{2^4}\left(\cos\frac{-49\pi}{12}+i\sin\frac{-49\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2^4}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right).$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn là $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2^4}\left(\cos\dfrac{\pm\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pm\pi}{12}\right)$. □

VÍ DỤ 12. Cho số phức z thỏa mãn $2|z|+\sqrt{3}iz = 4-z$. Tìm số phức $w = z^{2012}+\dfrac{1}{z^{2013}}$. **ĐS:** $w = -\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Lời giải.
Gọi $z = a+bi$ (với $a,\ b\in\mathbb{R}$). Ta có

$$2|z|+\sqrt{3}iz = 4-z \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{3}(a+bi) = 4-(a+bi) \Leftrightarrow (2\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{3})+a\sqrt{3}i = (4-a)-bi.$$

Do đó $\begin{cases} 2\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{3} = 4-a \\ a\sqrt{3} = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{3} = 4-a \\ b = -a\sqrt{3}. \end{cases}$

Suy ra $|a|+a = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = 1 \text{ (nếu } a\geq 0) \\ 0 = 1 \text{ (nếu } a\leq 0) \end{array}\right. \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn $a\geq 0$).

Với $a = \dfrac{1}{2}$ thì $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}$ và $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$. Khi đó

$$w = \cos\frac{2012\pi}{3}-i\sin\frac{2012\pi}{3}+\cos\frac{2013\pi}{3}+i\sin\frac{2013\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\pi+i\sin\pi = -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Vậy $w = -\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. □

VÍ DỤ 13. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

1. $z = (\sqrt{3}+i)^8$ **ĐS:** $Re(z) = -\dfrac{1}{2^9},\ Im(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2^9}$

2. $z = \dfrac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9}$ **ĐS:** $Re(z) = 0,\ Im(z) = -2^{14}$

Lời giải.

1. Ta có $\sqrt{3}+i = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z = \dfrac{1}{2^8}\left(\cos\dfrac{8\pi}{3}+i\sin\dfrac{8\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2^8}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

   Vậy $Re(z) = -\dfrac{1}{2^9},\ Im(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2^9}$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} &(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{10} = (2i)^5 = 32i, \\ &\sqrt{3}+i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (\sqrt{3}+i)^9 = \frac{1}{2^9}\left(\cos\frac{9\pi}{3}+i\sin\frac{9\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2^9}. \end{aligned}$$

   Do vậy $z = \dfrac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9} = -2^{14}i \Rightarrow Re(z) = 0,\ Im(z) = -2^{14}$.

□

VÍ DỤ 14. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

① $w = z^{2014} + \dfrac{1}{z^{2014}}$ biết $z + \dfrac{1}{z} = 1$ **ĐS:** $Re(z) = -1,\ Im(z) = 0$

② $z = \dfrac{(1+i)^{2012}}{(\sqrt{3}+i)^{2011}}$ **ĐS:** $Re(z) = -2^{3016},\ Im(z) = 2^{3016}\cdot\sqrt{3}$

Lời giải.

① Ta có $z + \dfrac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

— Với $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow w = \cos\dfrac{2014\pi}{3} + i\sin\dfrac{2014\pi}{3} + \cos\dfrac{2014\pi}{3} - i\sin\dfrac{2014\pi}{3} = -1$.
Do đó $Re(z) = -1,\ Im(z) = 0$.

— Với $z = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow w = \cos\dfrac{2014\pi}{3} - i\sin\dfrac{2014\pi}{3} + \cos\dfrac{2014\pi}{3} + i\sin\dfrac{2014\pi}{3} = -1$.
Do đó $Re(z) = -1,\ Im(z) = 0$.

② Ta có

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{2012} = (2i)^{1006} = -2^{1006},$$
$$\sqrt{3} + i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (\sqrt{3}+i)^{2011} = \frac{1}{2^{2011}}\left(\cos\frac{2011\pi}{3} + i\sin\frac{2011\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^{2011}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Do vậy $z = \dfrac{(1+i)^{2012}}{(\sqrt{3}+i)^{2011}} = -2^{3017}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^{3016} + 2^{3016}\cdot\sqrt{3}i \Rightarrow Re(z) = -2^{3016},\ Im(z) = 2^{3016}\cdot\sqrt{3}$.

□