SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM 2018-2019
Môn thi: TOÁN VÒNG 2
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4\left(x^2+xy+y^2\right)+1$.

Lời giải

Nhận xét: $x\neq y$

$\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)>|4xy+1|$

$$\begin{aligned} x^3+y^3+x^2y+xy^2=4\left(x^2+xy+y^2\right)+1 \Leftrightarrow & \left(x^2+y^2\right)(x+y-4)=4xy+1\\ \Rightarrow & 2|4xy+1|=\left|2\left(x^2+y^2\right)(x+y-4)\right|>|4xy+1||x+y-4|\\ \Rightarrow & 2>|x+y-4|\\ \Rightarrow & x+y=3;4;5 \end{aligned}$$

$x+y=3$ không thỏa

$x+y=4$ không thỏa

$x+y=5$ tìm được $x=1;y=4$hoặc $x=4;y=1$ □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 2. Cho $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2x\sin^2y+1}+\frac{1}{\sin^2x\cos^2y+1}+\frac{1}{\cos^2x+1}\leq\frac{9}{2\left(\sin^2x\sin2y+\sin2x\sin y+\sin2x\cos y\right)}$$

Lời giải

Đặt $a=\sin x\sin y, b=\sin x\cos y, c=\cos x$ thì $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$

Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\leq\dfrac{9}{4(ab+ac+bc)}$

Thật vậy, $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\leq\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{1}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{1}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

Mà

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(b+c)= & (a+b+c)(ab+ac+bc)-abc\\ \geq & (a+b+c)(ab+ac+bc)-\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+ac+bc)\\ = & \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

Nên $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\leq\dfrac{9}{4(ab+ac+bc)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt3}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt3}\Leftrightarrow x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt3}, y=\dfrac{\pi}{4}$ □

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) .Phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B. Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng EI và BC là J.

DF là trục đối xứng của EC

$\widehat{CEJ} = \widehat{ECI} = \widehat{HAC} = \widehat{HBC}$ nên tứ giác $BGEJ$ nội tiếp

Phép nghịch đảo $N_C^{k=CE.CG=CJ.CB}$ biến đường tròn (BCG) thành đường thẳng EJ nên biến K,L thành chính nó.

Do đó $CK^2 = CL^2 = k$ hay đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua điểm C cố định. □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 4. Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phần tử. Biết rằng hai tập tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

Lời giải

Lấy tập A tùy ý, trong A sẽ có phần tử a thuộc ít nhất 45 tập hợp khác. Nếu không, số tập hợp không quá 45x44 + 1 = 1981.

Suy ra a thuộc 46 tập $A, A_1, ..., A_{45}$.

Với tập B bất kì, nếu a không thuộc B thì với mỗi tập $A_i (1 \le i \le 45)$ đều có phần tử a_i chung với B mà $a_i \ne a$.

Thành ra B không có phần tử chung với A, nếu có thì phần tử chung đó phải thuộc tập $A_i (1 \le i \le 45)$ nào đó nên A và $A_i (1 \le i \le 45)$ có 2 phần tử chung. (Vô lí)

Nên a thuộc B, do đó a thuộc 2018 tập đã cho. □