# Mục lục

**Chương 1. Số phức** **2**
1.1 Tập hợp biểu diễn số phức . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
1.3 Bài tập . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**Chương 2. Tiếp tuyến** **31**
2.1 Hàm phân thức . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.2 Hàm bậc ba . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

# *Chương 1*
# *Số phức*

## 1.1 *Tập hợp biểu diễn số phức*

**Tính chất 1.1**

*Cho hai số phức $z$ và $z_1$. Gọi $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$, $A$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_1$. Đại lượng $|z-z_1|$ là độ dài đoạn thẳng $AM$.*

*Chứng minh.* Gọi $M(x,y)$, $A(x_1,y_1)$. Ta có

$$|z-z_1| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}.$$

□

**Tính chất 1.2**

*Cho số phức $z_1 = a+bi$, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ thoả $|z-z_1| = R$ là đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $R$.*

*Chứng minh.* Gọi $M(x,y)$. Từ giả thiết ta có

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

□

**Ví dụ 1.1**

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$ thoả $|z+2-i| = 3$ là đường tròn tâm $(-2,1)$ bán kính $R = 3$.

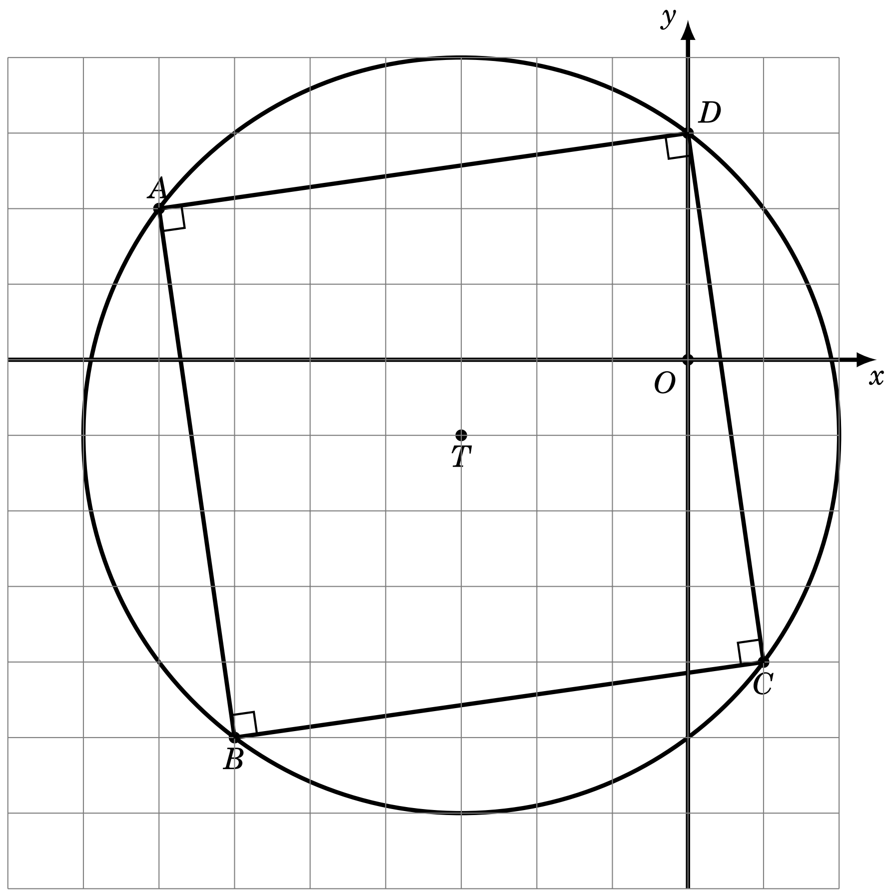
**Ví dụ 1.2**

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$ thoả $|z+i| = 1$ là đường tròn tâm $(0,-1)$ bán kính $R = 1$.

**Ví dụ 1.3**

Cho số phức $z$ thoả $|z+3+i|=5$. Tính giá trị của biểu thức

$$E=|z+7-2i|^2+|z+6+5i|^2+|z-3i|^2+|z-1+4i|^2.$$




***Lời giải***. Gọi $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$, thì $M$ thuộc đường tròn tâm $T(-3,-1)$, bán kính $R=5$.

Xét các điểm $A(-7,2)$, $B(-6,-5)$, $C(1,-4)$, $D(0,3)$. Ta có

$$E=AM^2+BM^2+CM^2+DM^2.$$

Để ý rằng, $ABCD$ là hình vuông có các đỉnh thuộc đường tròn, nên

$$E=AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=8R^2=200.$$

♢

***Lời bình***. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $O$, bán kính $R$. Với $M$ là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng chứa đường tròn, ta có

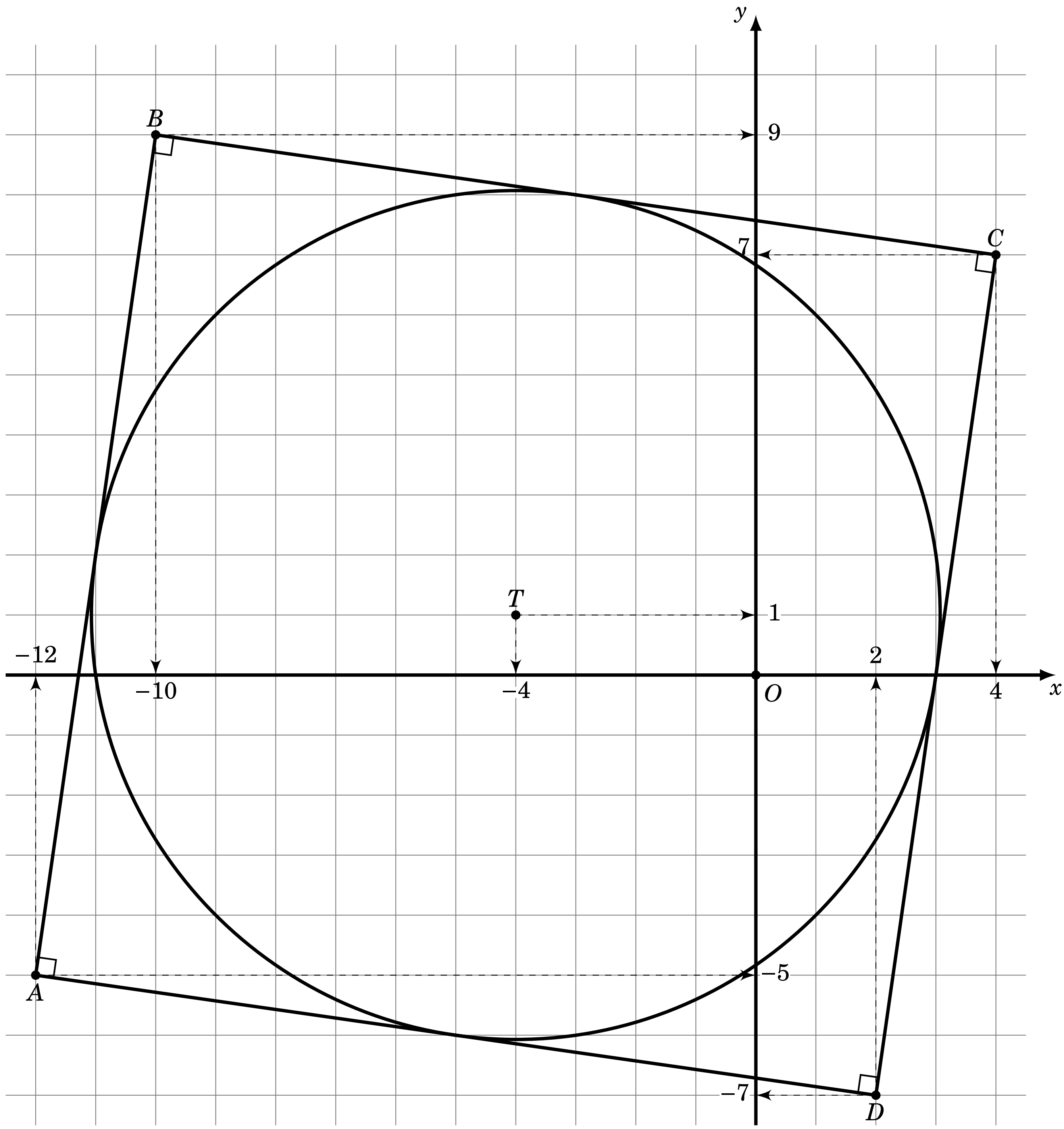
$$A_1M^2+A_2M^2+\cdots+A_nM^2=n(R^2+OM^2).$$

♣

**Ví dụ 1.4**

Cho số phức $z$ thoả $|z+4-i| = 5\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$E = |z+12+5i|^2 + |z+10-9i|^2 + |z-4-7i|^2 + |z-2+7i|^2.$$




***Lời giải***. Gọi $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$, thì $M$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $T(-4,1)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Xét các điểm $A(-12,-5)$, $B(-10,9)$, $C(4,7)$, $C(2,-7)$. Ta có

$$E = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2.$$

Để ý rằng, $ABCD$ là hình vuông ngoại tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$, nên

$$E = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 3AB^2 = 600.$$

◊

**Tính chất 1.3**

*Cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$ thoả $|z - z_1| = R$. Tập hợp biểu diễn của số phức $w = z + z_2$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2$ và bán kính bằng $R$.*

*Chứng minh.* Ta có $w = z + z_2$, nên

$$w - z_2 - z_1 = z - z_1.$$

Do đó

$$|w - z_2 - z_1| = |z - z_1|.$$

Hay

$$|w - (z_1 + z_2)| = R.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2$ và bán kính bằng $R$. □

**Ví dụ 1.5**

Cho số phức $z$ thoả $|z+2-3i| = 3$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z+3+i$.

***Lời giải.*** Ta viết lại giả thiết thành

$$|z - (-2 + 3i)| = 3.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z + 3 + i$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức

$$(-2 + 3i) + (3 + i) = 1 + 4i.$$

Tức có tâm là điểm $I(1,4)$. Bán kính của đường tròn là $R = 3$. ◊

**Ví dụ 1.6**

Cho số phức $z$ thoả $|z - i| = 4$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 5 + 2i$.

***Lời giải.*** Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 5 + 2i$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức

$$\mathrm{i} + (-5 + 2\mathrm{i}) = -5 + 3\mathrm{i}.$$

Tức có tâm là điểm $I(-5,3)$. Bán kính của đường tròn là $R = 4$. ♢

**Ví dụ 1.7**

Cho số phức $z$ thoả $|z - 1 - i| = 5$. Xét số phức $w = z + 2 + 3i$. Tìm giá trị lớn nhất của môđun $w$.

***Lời giải.*** Với $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho $w$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2 = 3 + 4i$, bán kính $R = 5$. Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ là

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Để ý rằng $(\mathscr{C})$ qua gốc toạ độ $O$. Do đó, $|w|$ lớn nhất khi và chỉ khi $|w|$ là đường kính của $(\mathscr{C})$. Vậy $\max|w| = 10$. ♢

**Tính chất 1.4**

*Cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$ ($z_2 \neq 0$), $z_3$ với $|z - z_1| = R$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z \cdot z_2 + z_3$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 \cdot z_2 + z_3$, bán kính bằng $|z_2|R$.*

*Chứng minh.* Ta có

$$w = z \cdot z_2 + z_3 \Leftrightarrow \frac{w - z_3}{z_2} = z.$$

Dẫn đến

$$\frac{w - z_3}{z_2} - z_1 = z - z_1.$$

Lấy modun hai vế, ta được

$$\frac{|w - z_3 - z_1 \cdot z_2|}{|z_2|} = |z - z_1|.$$

Hay

$$|w - (z_1 \cdot z_2 + z_3)| = |z_2|R.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 \cdot z_2 + z_3$, bán kính bằng $|z_2|R$. □

**Ví dụ 1.8**

(Câu 34, Đề minh hoạ môn Toán kì thi THPT quốc gia 2017 của Bộ GD& ĐT).
Cho số phức $z$ thoả mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

***Lời giải.*** Bán kính $r = |3+4i| \cdot 4 = 20$. ◇

**Ví dụ 1.9**

Cho số phức $z$ thoả mãn $|z+i| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (4+3i)z+2+i$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

***Lời giải.*** Tâm của đường tròn biểu diễn số phức $w$ là điểm biểu diễn cho số phức

$$(-i)(4+3i)+2+i = 5-3i,$$

tức tâm đường tròn là điểm $(5,-3)$.

Bán kính của đường tròn là

$$r = |4+3i| \cdot 2 = 10.$$

◇

**Ví dụ 1.10**

Cho số phức $z$ thoả mãn $|z+1+2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (5+12i)z+3-i$ là một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

***Lời giải.*** Ta có

$$|z+1+2i| = 3 \Leftrightarrow |z-(-1-2i)| = 3.$$

Tâm của đường tròn biểu diễn số phức $w$ là điểm biểu diễn cho số phức

$$(-1-2i)(5+12i)+3-i = 22-23i,$$

tức tâm đường tròn là điểm $(22,-23)$.

Bán kính của đường tròn là

$$r = |5+12i| \cdot 3 = 39.$$

◇

**Tính chất 1.5**

*Cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$ ($z_2 \neq 0$), $z_3$ với $|z-z_1| = R$. Tìm tập hợp biểu diễn của số phức $w = \dfrac{z}{z_2}+z_3$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\dfrac{z_1}{z_2}+z_3$, bán kính đường tròn bằng $\dfrac{R}{|z_2|}$.*

*Chứng minh.* Chứng minh tương tự, tập hợp biểu diễn của số phức $w = \dfrac{z}{z_2}+z_3$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\dfrac{z_1}{z_2}+z_3$, bán kính đường tròn bằng $\dfrac{R}{|z_2|}$. □

**Ví dụ 1.11**

Cho số phức $z$ thoả điều kiện $|z-5|=3$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $w=\dfrac{z}{3+4i}+1-i$.

***Lời giải.*** Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $w=\dfrac{z}{3+4i}+1-i$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức

$$\frac{5}{3+4i}+1-i=\frac{8}{5}-\frac{9\mathrm{i}}{5}.$$

Bán kính của đường tròn bằng $\dfrac{5}{|3+4\mathrm{i}|}=1$.

Đáp số. $\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{9}{5}\right)^2=1$.

◇

**Ví dụ 1.12**

Cho số phức $z$ thoả điều kiện $|z-4-3\mathrm{i}|=3$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $w=\dfrac{z}{5-12\mathrm{i}}+2+\mathrm{i}$.

**Tính chất 1.6**

*Cho hai số phức $z$, $z_1$ thoả $|z-z_1|=R$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $|z_1|+R$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $||z_1|-R|$.*

*Chứng minh.* Gọi $I$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_1$ và $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$.

- Với ba điểm $O$, $I$, $M$, ta có $OI+IM\geqslant OM$ hay $|z_1|+R\geqslant |z|$. Do đó, Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $|z_1|+R$.

- Mặt khác $|OI-IM|\leqslant OM$ hay $||z_1|-R|\leqslant |z|$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $||z_1|-R|$.

□

**Ví dụ 1.13**

Cho số phức $z$ thoả $|z+5+12i|=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

***Lời giải.*** Số phức $-5-12i$ có môđun là $\sqrt{5^2+12^2}=13$.

Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $3+13=16$.

Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $13-3=10$.

◇

**Tính chất 1.7**

*Cho hai số phức $z$, $z_1$ thoả $|z-z_1|=R$. Giá trị lớn nhất của $|z+z_2|$ là $|z_1+z_2|+R$ và giá trị nhỏ nhất của $|z+z_2|$ là $||z_1+z_2|-R|$.*

**Ví dụ 1.14**

Cho số phức $z$ thoả $|z+3+\mathrm{i}|=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+6+5\mathrm{i}|$.

***Lời giải***. Ta viết lại giả thiết như sau:

$$|z+3+\mathrm{i}|=3 \Leftrightarrow |z-(-3-\mathrm{i}|)=3.$$

Giá trị lớn nhất của $|z+6+5\mathrm{i}|$ là

$$3+|(-3-\mathrm{i})+6+5\mathrm{i}|=3+|3+4\mathrm{i}|=3+5=8.$$

Giá trị nhỏ nhất của $|z+6+5\mathrm{i}|$ là

$$|(-3-\mathrm{i})+6+5\mathrm{i}|-3=|3+4\mathrm{i}|-3=5-3=2.$$

♢

**Ví dụ 1.15: (Thi thử lần IV trường Đại học Vinh, 2016–2017).**

Cho số phức $z$ thoả mãn không phải là số thực và số $w=\dfrac{z}{2+z^2}$ là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=|z+1-\mathrm{i}|$.

**Tính chất 1.8**

*Cho các số phức $z$, $z_1$ $(z_1\neq 0)$, $z_2$ thoả $|z\cdot z_1+z_2|=R$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\dfrac{R+|z_2|}{|z_1|}$; Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\dfrac{|R-|z_2||}{|z_1|}$.*

*Chứng minh*. Ta có

$$|z\cdot z_1+z_2|=R \Leftrightarrow \left|z+\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{R}{|z_1|}.$$

Dựa theo Tính chất 1.1, ta có được các kết quả của Tính chất 1.1. □

**Bài tập 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ trong các trường hợp sau:

1) $|z(3-4i)+i|=2.$

2) $|2z+(5+12i)|=3.$ Đáp số. $5\leqslant |z|\leqslant 8.$

3) $|z(4+3i)+3+4i|=10.$ Đáp số. $1\leqslant |z|\leqslant 3.$

4) $|z(3+4i)+5+12i| = 10.$ Đáp số. $\frac{3}{5} \leqslant |z| \leqslant \frac{23}{5}$.

**Tính chất 1.9**

*Cho các số phức $z$, $z_1$ $(z_1 \neq 0)$, $z_2$ thoả $|z \cdot z_1 + z_2| = R$. Giá trị lớn nhất của $|z+z_3|$ là $\frac{R}{|z_1|} + |z_4|$; Giá trị nhỏ nhất của $\left|\frac{R}{|z_1|} - |z_4|\right|$, ở đây, $z_4 = z_3 - \frac{z_2}{z_1}$.*

*Chứng minh.* Ta có

$$|z \cdot z_1 + z_2| = R \Leftrightarrow \left|z + \frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Hay

$$\left|z + z_3 - \left(z_3 - \frac{z_2}{z_1}\right)\right| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Đặt $w = z + z_3$, $z_4 = z_3 - \frac{z_2}{z_1}$, ta được

$$|w - z_4| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Dựa theo Tính chất 1.1, ta có được các kết quả của Tính chất 1.1. □

**Ví dụ 1.16**

Cho số phức $z$ thoả $|(8+15\mathrm{i})z + 3 + 4\mathrm{i}| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+3\mathrm{i}|$.

Đáp số. $3 \leqslant |z+3\mathrm{i}| \leqslant \frac{53}{17}$.

**Ví dụ 1.17**

Cho số phức $z$ thoả $|(3-4\mathrm{i})z + 12 - 5\mathrm{i}| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+3\mathrm{i}|$.

Đáp số. $\frac{12}{5} \leqslant |z+3\mathrm{i}| \leqslant \frac{16}{5}$.

**Ví dụ 1.18**

Cho số phức $z$ thoả $|(3+4\mathrm{i})z + 5 + 12\mathrm{i}| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+4\mathrm{i}|$.

Đáp số. $\frac{18}{5} \leqslant |z+4\mathrm{i}| \leqslant \frac{24}{5}$.

**Ví dụ 1.19**

Cho số phức $z$ thoả $|(3-4\mathrm{i})z + 1 + 2\mathrm{i}| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1+\mathrm{i}|$.

Đáp số. $\frac{2}{5} \leqslant |z-1+\mathrm{i}| \leqslant \frac{8}{5}$.

**Tính chất 1.10**

*Cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$, $z_3$ thoả $|z-z_1| = |z-z_2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $w = z + z_3$.*

*Chứng minh.* Ta có $z = w - z_3$. Thay vào giả thiết đã cho, ta được

$$|w-(z_1+z_3)| = |w-(z_2+z_3)|. \tag{1.1}$$

Gọi $A$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_1+z_3$; $B$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_2+z_3$; $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $w$. Từ (1.1), ta có $AM = BM$. Như vậy $M$ thuộc đường trung trực $(\Delta)$ của đoạn $AB$.

Ta có $|w|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $OM$ nhỏ nhất hay $OM$ là khoảng cách từ gốc toạ độ $O$ đến đường thẳng $(\Delta)$. □

**Ví dụ 1.20**

(Thi thử trường THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, lần III, 2016 – 2017)
Cho số phức $z$ thoả mãn

$$|z-1-2\mathrm{i}| = |z-2+\mathrm{i}|.$$

Đặt $w = z+2-3\mathrm{i}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Đáp số. $\dfrac{11}{\sqrt{10}}$.

**Ví dụ 1.21**

Cho số phức $z$ thoả mãn

$$|z-3+4\mathrm{i}| = |z+2+3\mathrm{i}|.$$

Đặt $w = z+1+4\mathrm{i}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

**Tính chất 1.11**

*Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $ax+by+c=0$ và hai điểm $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$. Đặt*

$$f(x,y) = ax+by+c.$$

*Ta có*

1) *$C$ và $D$ ở cùng phía của $\Delta$ khi và chỉ khi*

$$(ax_1+by_1+c)\cdot(ax_2+by_2+c) > 0.$$

2) *$C$ và $D$ ở khác phía của $\Delta$ khi và chỉ khi*

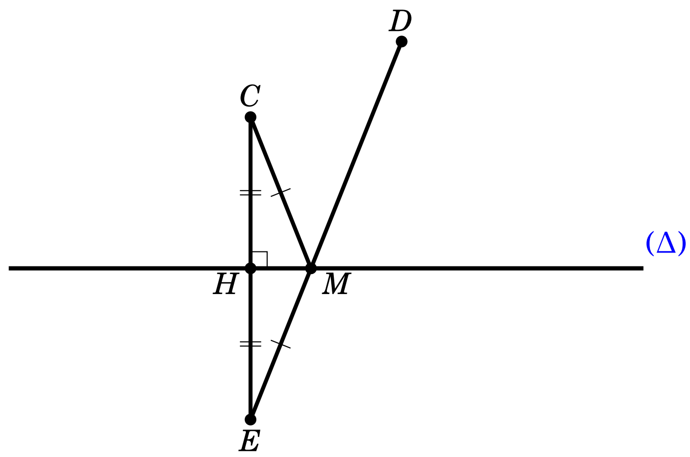
$$(ax_1+by_1+c)\cdot(ax_2+by_2+c) < 0.$$

**Tính chất 1.12**

*Cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ thoả $|z-z_1| = |z-z_2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$W = |z-z_3| + |z-z_4|.$$

*Chứng minh.* Gọi $A$, $B$, $C$, $D$, $M$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, $z$. Từ giả thiết, ta có $AM = BM$, tức $M$ thuộc đường trung trực $(\Delta)$ của đoạn $AB$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $CM + DM$. Có hai khả năng sau:




- Hai điểm $C$ và $D$ ở khác phía của đường thẳng $(\Delta)$. Khi đó $M$ là giao điểm của $(\Delta)$ và đường thẳng $CD$. Giá trị nhỏ nhất cần tìm chính là $CD$ hay cũng là môđun của số phức $z_3 - z_4$.
- Hai điểm $C$ và $D$ ở cùng phía của đường thẳng $(\Delta)$. Gọi $E$ là điểm đối xứng của $C$ qua $(\Delta)$. Giá trị nhỏ nhất cần tìm chính là $ED$ hay cũng là môđun của số phức $z_5 - z_4$, ở đây $E$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_5$. Lúc đó, $M$ là giao điểm của đường $ED$ và $\Delta$.

□

**Ví dụ 1.22**

Cho số phức $z$ thoả

$$|z-1-6\mathrm{i}| = |z-5-4\mathrm{i}|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+3-\mathrm{i}| + |z-1+7\mathrm{i}|$.

***Lời giải.*** Gọi $A(1,6)$, $B(5,4)$, $C(-3,1)$, $D(1,-7)$, $M(x,y)$. Từ giả thiết, ta có $AM = BM$, như vậy $M$ thuộc đường trung trực $\Delta$ của đoạn $AB$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $CM + DM$.

Phương trình $\Delta$ qua trung điểm $T(3,5)$ của đoạn $AB$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (4,-2)$ làm vectơ pháp tuyến là

$$4(x-3) - 2(y-5) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

Đặt

$$f(x, y) = 2x - y - 1.$$

Ta có

$$f(-3,1)\cdot f(1,-7) = [2\cdot(-3)-1-1]\cdot[2\cdot 1+7-1] = -64 > 0,$$

nên hai điểm $C$ và $D$ ở khác phía của $(\Delta)$. Do đó, $M$ là giao điểm của đường thẳng $CD$ và $(\Delta)$. Lúc đó, $CM + DM = CD = 4\sqrt{5}$.

◊

***Lời bình***. Ta có thể lí luận như sau để biết giao điểm của đường thẳng $CD$ với $(\Delta)$ ở trong hay ở ngoài đoạn $CD$ như sau:

Phương trình đường thẳng $CD$ là $2x + y + 5 = 0$.

Gọi $I$ là giao điểm của $\Delta$ và $CD$, thì $I(-1,-3)$. Ta có $\overrightarrow{IC} = (-2,4)$, $\overrightarrow{ID} = (2,-4)$. Do đó, $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{ID}$, nên $I$ là trong đoạn $CD$ và $M$ trùng với $I$.

Giá trị nhỏ nhất của $CM + DM$ là $CD = 4\sqrt{5}$. ♣

**Ví dụ 1.23**

Cho số phức $z$ thoả

$$|z + 1 - 3\mathrm{i}| = |z + 4 - \mathrm{i}|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |z + 1 - 2\mathrm{i}| + |z + 5 + \mathrm{i}|$.

Đáp số. $\min E = 5$ tại $M\left(2, -\dfrac{5}{4}\right)$.

**Ví dụ 1.24**

Cho số phức $z$ thoả

$$|z + 5 + 6\mathrm{i}| = |z + 7 + 4\mathrm{i}|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |z + 1 + 2\mathrm{i}| + |z + 3 + 4\mathrm{i}|$.

Đáp số. $\min E = 4$ tại $M(3,2)$.

**Ví dụ 1.25**

Cho số phức $z$ thoả

$$|z - 2 - 3\mathrm{i}| = |z - 4 - 5\mathrm{i}|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |z + 1 + 2\mathrm{i}| + |z + 3 - 4\mathrm{i}|$.

Đáp số. $\min E = 4\sqrt{10}$ tại $M\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{2}\right)$.

**Tính chất 1.13**

*Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ và hai điểm $A$, $B$ cố định thuộc $(\mathscr{C})$. Điểm $M$ trên $(\mathscr{C})$ sao cho $MA + MB$*

1) *nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ trùng với $A$ hay $M$ trùng với $B$.*

2) *lớn nhất khi $M$ là một trong hai giao điểm của đường trung trực đoạn $AB$ với đường tròn $(\mathscr{C})$.*

*Chứng minh.*

1) Ta có $MA + MB \geqslant AB$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M$ trùng với $A$ hay $M$ trùng với $B$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ là $AB$.

2) Gọi $MI$ là đường trung tuyến tam giác $MAB$, ta có

$$(MA + MB)^2 \leqslant 2(MA^2 + MB^2). \tag{1.2}$$

Lại có

$$2(MA^2 + MB^2) = 4MI^2 + AB^2. \tag{1.3}$$

Từ (1.2) và (1.3), ta có

$$(MA + MB)^2 \leqslant 4MI^2 + AB^2. \tag{1.4}$$

Do $AB$ không đổi, nên từ (1.2) và (1.4), ta có $MA + MB$ lớn nhất khi và chỉ khi $MA = MB$ và $MI$ lớn nhất. Hay $M$ là một trong hai giao điểm của đường trung trực đoạn $AB$ với đường tròn $(\mathscr{C})$.

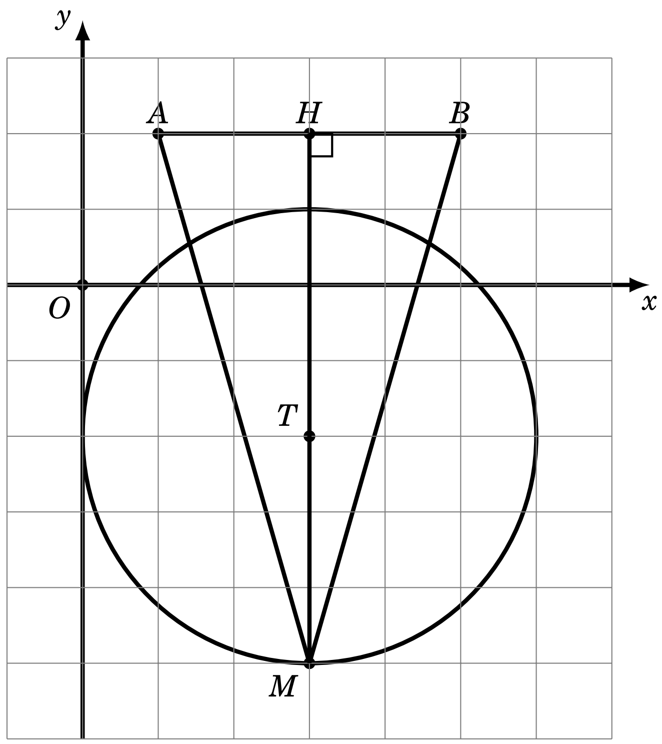
□

***Lời bình***. Điều kiện $A, B$ cố định thuộc $(\mathscr{C})$ chỉ sử dụng cho bài toán $MA + MB$ nhỏ nhất. ♣

**Ví dụ 1.26**

Cho số phức $z$ và $w$ thoả $|w + i| = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$|z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|.$$




***Lời giải.***

◇

**Ví dụ 1.27**

Cho số phức $z$ thoả $|z-1-2\mathrm{i}|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w=|z+2+2\mathrm{i}|+|z-4-6\mathrm{i}|.$$

Đáp số. $10 \leqslant w \leqslant 10\sqrt{2}$.

**Ví dụ 1.28**

Cho số phức $z$ thoả $|z+1+3\mathrm{i}|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w=|z+4-\mathrm{i}|+|z-2+7\mathrm{i}|.$$

Đáp số. $10 \leqslant w \leqslant 10\sqrt{2}$.

**Ví dụ 1.29**

Cho số phức $z$ thoả $|z+1+3\mathrm{i}|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w=|z-5-5\mathrm{i}|+|z-2-\mathrm{i}|.$$

Đáp số. $5 \leqslant w \leqslant 25$.

**Ví dụ 1.30**

Cho số phức $z$ thoả $|z-1-2i|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w=|z+3+i|+|z-4-6i|.$$

Đáp số. $7\sqrt{2}\leqslant w\leqslant 2\sqrt{5\left(10+\sqrt{2}\right)}$.

**Ví dụ 1.31**

Cho số phức $z$ thoả $|z+1+3i|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w=|z+1+9i|+|z-2-i|.$$

Đáp số. $3\sqrt{10}\leqslant w\leqslant 2\sqrt{5\left(10+\sqrt{10}\right)}$.

**Ví dụ 1.32**

Cho số phức $z$ thoả $|z+1+3i|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w=|z+1+8i|+|z+5+6i|.$$

Đáp số. $2\sqrt{5}\leqslant w\leqslant 2\sqrt{50+20\sqrt{5}}$.

**Tính chất 1.14**

*Cho hai số phức $z$, $z_1$ thoả*

$$|z-z_1|+|z+z_1|=k.$$

*Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\dfrac{k}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\sqrt{\dfrac{k^2}{4}-|z_1|^2}$.*

*Chứng minh.* Ta có

$$k=|z-z_1|+|z+z_1|\geqslant|z-z_1+z+z_1|=2|z|\Leftrightarrow|z|\leqslant\frac{k}{2}.$$

Mặt khác

$$k\leqslant\sqrt{2\left(|z-z_1|^2+|z+z_1|^2\right)}.$$

Sử dụng tính chất

$$|z-z_1|^2+|z+z_1|^2=2\left(|z|^2+|z_1|^2\right),$$

ta suy ra

$$k^2\leqslant 4\left(|z|^2+|z_1|^2\right).$$

Do đó,

$$|z|\geqslant\sqrt{\frac{k^2}{4}-|z_1|^2}.$$

□

**Ví dụ 1.33**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết rằng

$$|z+5|+|z-5|=26.$$

***Lời giải***. Ngoài kết quả đã chứng minh ở trên, ta có thể giải ví dụ bằng phương pháp hình học như sau.

Gọi $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$, $M(x,y)$ là tập hợp các điểm biểu diễn cho $z$. Từ giả thiết, ta có $MF_1+MF_2=26$. Do đó, tập hợp các điểm $M$ là một elip $(E)$.

Đặt $2a=26$, hay $a=13$. Do $2c=F_1F_2=10$, nên $c=5$.

Mặt khác, $a^2=b^2+c^2$, nên $b^2=a^2-c^2=144$.

Vậy phương trình của $(E)$ là $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$.

Độ dài nửa trục lớn của $(E)$ là 13 và độ dài nửa trục nhỏ của $(E)$ là 12.

Do đó, $|z|$ lớn nhất là 13, tại $z=13$ hoặc $z=-13$ và $|z|$ nhỏ nhất là 12, tại $z=12i$ hoặc $z=-12i$. ♢

**Ví dụ 1.34**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết rằng

$$\left|z+2\sqrt{3}+2i\right|+\left|z-2\sqrt{3}-2i\right|=10.$$

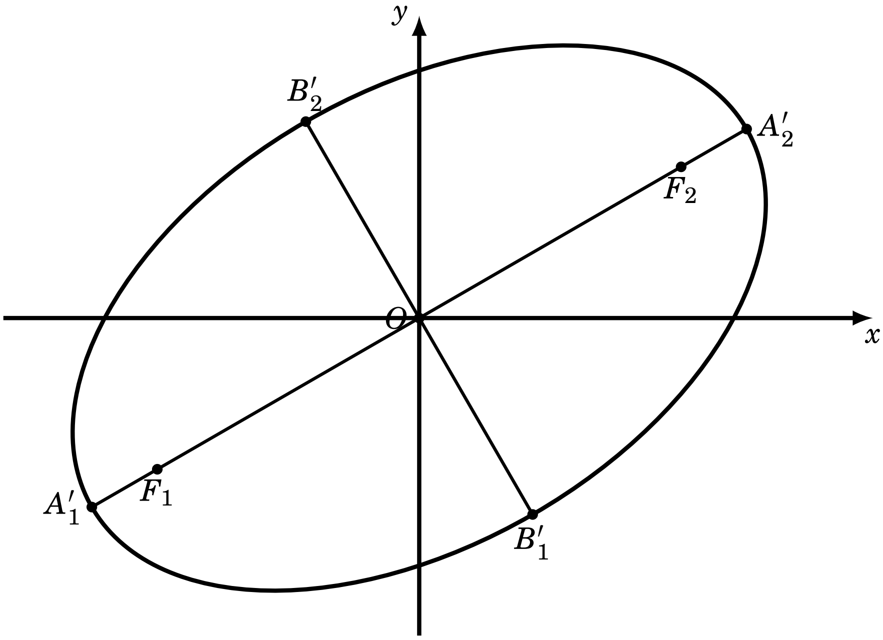
***Lời giải***. Một lần nữa, ta cũng giải bằng phương pháp hình học.

Gọi $F_1(-2\sqrt{3},-2)$, $F_2(2\sqrt{3},2)$, $M(x,y)$ là tập hợp các điểm biểu diễn cho $z$. Từ giả thiết, ta có $MF_1+MF_2=10$. Do đó, tập hợp các điểm $M$ là một elip $(E)$.

Ta có $2a=10$, hay $a=5$. Do $2c=F_1F_2=8$, nên $c=4$.

Mặt khác, $b^2=a^2-c^2=9$.

Độ dài nửa trục lớn của $(E)$ là 5 và độ dài nửa trục nhỏ của $(E)$ là 3.

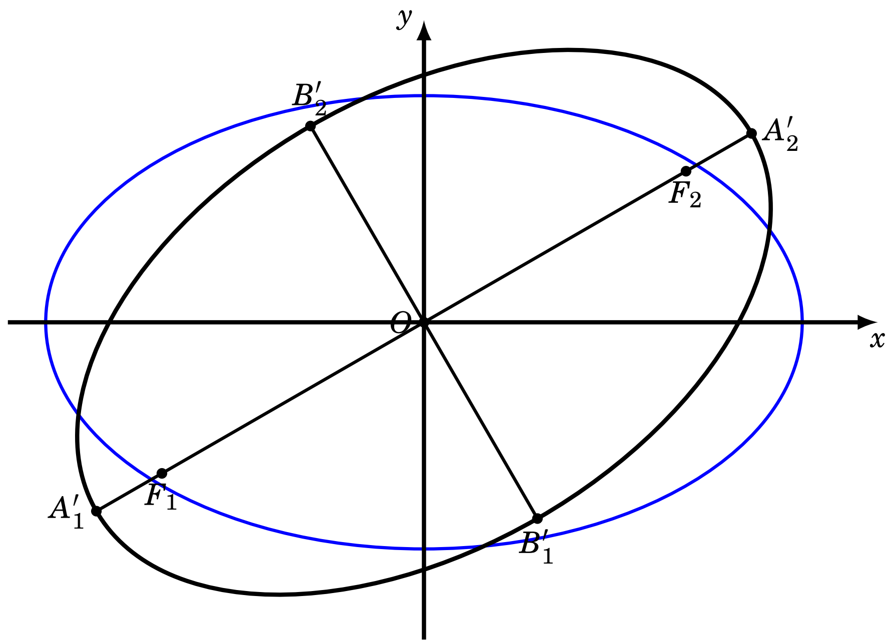



Do đó, $|z|$ lớn nhất là 5, bằng là nửa độ dài đoạn $A'_1A'_2$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M$ trùng $A'_1$ hoặc $A'_2$) và $|z|$ nhỏ nhất là 3, bằng là nửa độ dài đoạn $B_1B_2$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M$ trùng $B'_1$ hoặc $B'_2$).

- Chú ý rằng, phương trình đường thẳng $F_1F_2$ là $x - y\sqrt{3} = 0$. Toạ độ các điểm $A'_1$ và $A'_2$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$
Giải hệ trên, ta có được $A'_1\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$ và $A'_2\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.
Do đó, $|z|$ lớn nhất là 5 tại $z = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2}i$ hoặc $z = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$.
- Đường thẳng $B'_1B'_2$ qua $O$ và vuông góc với đường thẳng $A'_1A'_2$ , nên có phương trình $\sqrt{3}x + y = 0$. Toạ độ các điểm $B'_1$ và $B'_2$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$
Giải hệ trên, ta có được $B'_1\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và $B'_2\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
Do đó, $|z|$ nhỏ nhất là 3 tại $z = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ hoặc $z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

◇

***Lời bình***. Phương trình elip có trong bài trên không có dạng chính tắc. Elip có được bằng cách quay elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ một góc $30°$, với tâm quay là điểm $O(0,0)$.




♣

**Bài tập 2.** Tìm phương trình biểu diễn các số phức $z$ thoả

1) $|z+3|+|z-3|=10$. Đáp số. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

2) $|z+4|+|z-4|=10$. Đáp số. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

3) $|z+5|+|z-5|=26$. Đáp số. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$.

4) $|z+12|+|z-12|=26$. Đáp số. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

**Bài tập 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết rằng

1) $|z+9|+|z-9|=30$.

Đáp số. $\max|z|=15$, tại $z=-15$; $\min|z|=12$, tại $z=-12i$.

2) $|z+4i|+|z-4i|=10$.

Đáp số. $\max|z|=5$, tại $z=-5$; $\min|z|=3$, tại $z=-3i$.

3) $|z-4+3i|+|z+4-3i|=26$.

Đáp số. $\max|z|=13$, tại $z=-\dfrac{52}{5}+\dfrac{39}{5}i$; $\min|z|=12$, tại $z=-\dfrac{36}{5}-\dfrac{48}{5}i$.

4) $|z-9+12i|+|z+9-12i|=34$.

Đáp số. $\max|z|=17$, tại $z=-\dfrac{51}{5}+\dfrac{68}{5}i$; $\min|z|=8$, tại $z=-\dfrac{32}{5}-\dfrac{24}{5}i$.

5) $|z-9+12i|+|z+9-12i|=50$.

Đáp số. $\max|z|=25$, tại $z=-15+20i$; $\min|z|=20$, tại $z=-16-12i$.

6) $|z-2+i|+|z+2-i|=6$.

Đáp số. $\max|z|=3$, tại $z=-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}+\dfrac{3\sqrt{5}}{5}i$; $\min|z|=2$, tại $z=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}i$.

**Tính chất 1.15**

*Cho hai số phức $z$, $z_1$ thoả*

$$m|z-z_1|+n|z+z_1|=k.$$

*Tìm giá trị lớn nhất của và giá trị nhỏ nhất $|z|$.*

**Ví dụ 1.35**

Cho số phức $z$ thoả

$$|z+1|+4|z-1|=25.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Đáp số. $\dfrac{22}{5}\leqslant w\leqslant\dfrac{28}{5}$.

***Lời giải***. Gọi $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $M(x,y)$ là điểm biểu diễn cho $z$. Để ý $O(0,0)$ là trung điểm của đoạn $AB$ và $AB=2$. Từ giả thiết ta có $AM+4BM=25$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn $OM$.

Đặt $a=AM$, $b=BM$ $(a,b>0)$ thoả $a+4b=25$ hay $a=25-4b$.

Ta có $|MA-MB|\leqslant AB$ hay

$$|a-b|\leqslant 2\Leftrightarrow|25-4b-b|\leqslant 2\Leftrightarrow\frac{23}{5}\leqslant b\leqslant\frac{27}{5}.$$

Mặt khác,

$$OM^2=\frac{AM^2+BM^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{(25-4b)^2+b^2}{2}-1=\frac{17b^2}{2}-100b+\frac{623}{2}.$$

Xét hàm số $f(b)=\dfrac{17b^2}{2}-100b+\dfrac{623}{2}$ với $\dfrac{23}{5}\leqslant b\leqslant\dfrac{27}{5}$, ta được giá trị lớn nhất của $f(b)$ là $\dfrac{784}{25}$ và giá trị nhỏ nhất của $f(b)$ là $\dfrac{484}{25}$. Khi đó, giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\dfrac{28}{5}$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\dfrac{22}{25}$. ♢

***Lời bình***. Việc tìm $\max|z|$ có thể làm đơn giản như sau: Ta có

$$\begin{aligned}|5z|&=|(z+1)+4(z-1)+3|\\&\leqslant|z+1|+4|z-1|+|3|\\&\leqslant 25+3.\end{aligned}$$

Do đó, giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\dfrac{28}{5}$. ♣

**Ví dụ 1.36**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ biết $z$ thoả

$$|z-15+36i|+3|z-10+24i|=21.$$

***Lời giải***. Đặt

$$t=z+\frac{(-15+36i)+(-10+24i)}{2}=z-\frac{25}{2}+30i.$$

Hay

$$z=t+\frac{25}{2}-30i.$$

Khi đó

$$z-15+36i=t+\frac{25}{2}-30i-15+36i=t-\frac{5}{2}+6i$$

và

$$z-10+24i=t+\frac{25}{2}-30i-10+24i=t+\frac{5}{2}-6i.$$

Giả thiết đã cho thành

$$\left|t-\frac{5}{2}+6i\right|+3\left|t+\frac{5}{2}-6i\right|=21.$$

Gọi $A\left(\frac{5}{2},-6\right)$, $B\left(-\frac{5}{2},6\right)$, $M(x,y)$ là điểm biểu diễn cho $t$. Để ý $O(0,0)$ là trung điểm của đoạn $AB$ và $AB=13$. Từ giả thiết ta có $AM+3BM=21$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn $OM$.

Đặt $a=AM$, $b=BM$ $(a,b>0)$ thoả $a+3b=21$ hay $a=21-3b$.

Ta có $|MA-MB|\leqslant AB$ hay

$$|a-b|\leqslant 13 \Leftrightarrow |21-3b-b|\leqslant 13 \Leftrightarrow 2\leqslant b\leqslant \frac{17}{2}.$$

Mặt khác,

$$OM^2=\frac{AM^2+BM^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{(21-3b)^2+b^2}{2}-\frac{13^2}{4}=5b^2-63b+\frac{713}{4}.$$

Xét hàm số $f(b)=5b^2-63b+\frac{713}{4}$ với $2\leqslant b\leqslant\frac{17}{2}$, ta được giá trị lớn nhất của $f(b)$ là $\frac{289}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của $f(b)$ là 0. Khi đó, giá trị lớn nhất của $|t|$ là $\frac{17}{2}$ tại $b=2$ và giá trị nhỏ nhất của $|t|$ là 0 tại ♢

**Bài tập 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ trong các trường hợp sau:

1) $4|z+i|+3|z-i|=10$.

Đáp số. $\max|z|=\frac{11}{7}$, tại $z=\frac{11}{7}$; $\min|z|=1$, tại $z=-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}$.

2) $2|z+1|+5|z-1|=25$.

Đáp số. $\max|z|=4$, tại $z=4$; $\min|z|=\frac{22}{7}$, tại $z=-\frac{22}{7}$.

3) $2|z+2i|+5|z-2i|=12$.

Đáp số. $\max|z|=\dfrac{18}{7}$, tại $z=\dfrac{18}{7}i$; $\min|z|=\dfrac{2}{3}$, tại $z=\dfrac{2}{3}i$.

4) $|z-4+3i|+4|z+4-3i|=20$.

Đáp số. $\max|z|=7$, tại $z=-\dfrac{28}{5}+\dfrac{21}{5}i$; $\min|z|=\dfrac{5}{3}$, tại $z=-\dfrac{4}{3}+i$.

5) $|z-5+12i|+2|z+5-12i|=30$.

Đáp số. $\max|z|=\dfrac{43}{3}$, tại $z=-\dfrac{215}{39}+\dfrac{172}{13}i$; $\min|z|=9$, tại $z=-\dfrac{45}{13}+\dfrac{108}{13}i$.

6) $3|z+4+3i|+2|z-4-3i|=26$.

Đáp số. $\max|z|=\dfrac{31}{5}$, tại $z=-\dfrac{124}{25}-\dfrac{93}{25}i$; $\min|z|=1$, tại $z=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

**Bài tập 5.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ trong các trường hợp sau:

1) $3|z-4-3i|+4|z-8-6i|=20$.

Đáp số. $\max|z|=\dfrac{75}{7}$, tại $z=\dfrac{60}{7}+\dfrac{45}{7}i$; $\min|z|=5$, tại $z=4+3i$.

2) $4|z+4-3i|+|z+8-6i|=20$.

Đáp số. $\max|z|=10$, tại $z=-8+6i$; $\min|z|=2$, tại $z=-\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i$.

3) $5|z+4-3i|+3|z+8-6i|=17$.

Đáp số. $\max|z|=6$, tại $z=-\dfrac{24}{5}+\dfrac{18}{5}i$; $\min|z|=\dfrac{19}{4}$, tại $z=-\dfrac{19}{5}+\dfrac{57}{20}i$.

4) $4|z-9+12i|+|z-6+8i|=20$.

Đáp số. $\max|z|=18$, tại $z=\dfrac{54}{5}-\dfrac{72}{5}i$; $\min|z|=10$, tại $z=6-8i$.

**Ví dụ 1.37**

Cho số phức $z$ có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$w=3|z+3|+4|z-3|.$$

***Lời giải***. Đặt $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Khi đó,

$$w=3\left|\cos\varphi+i\sin\varphi+3\right|+4\left|\cos\varphi+i\sin\varphi-3\right|.$$

Lấy môđun các số phức ở vế phải của biểu thức trên, ta được

$$w=3\cdot\sqrt{10+6\cos\varphi}+4\cdot\sqrt{10+6\cos\varphi}.$$

Đặt $t=\cos\varphi$, $-1\leqslant t\leqslant 1$, $w$ trở thành

$$f(t)=\sqrt{2}\left(3\cdot\sqrt{5+3t}+4\cdot\sqrt{5-3t}\right).$$

Đạo hàm của hàm số $f(t)$ là

$$f'(t) = \sqrt{2}\left(-\frac{6}{\sqrt{5-3t}} + \frac{9}{2\sqrt{5+3t}}\right).$$

Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = -\frac{7}{15}$. Ta có,

$$f(-1) = 22, \quad f(1) = 20, \quad f\left(-\frac{7}{15}\right) = 10\sqrt{5}.$$

- Giá trị nhỏ nhất của $w$ là 20, đạt được tại $t = 1$. Khi đó $\cos\varphi = 1$ và $\sin\varphi = 1$. Dẫn đến $z = 1$.
- Giá trị lớn nhất của $w$ là $10\sqrt{5}$, đạt được tại $t = -\frac{7}{15}$.

  Khi đó $\cos\varphi = -\frac{7}{15}$ và $\sin\varphi = -\frac{4\sqrt{11}}{15}$. Số phức cần tìm là $z = -\frac{7}{15} - \frac{4\sqrt{11}}{15}i$.

◊

**Ví dụ 1.38**

Cho số phức $z$ có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$w = 5|z-3-4i| + 12|z+3+4i|.$$

***Lời giải.*** Vì $|z| = 1$, nên đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Khi đó,

$$w = 5\left|\cos\varphi + i\sin\varphi - 3 - 4i\right| + 12\left|\cos\varphi + i\sin\varphi + 3 + 4i\right|.$$

Lấy mô đun các số phức trên, ta được

$$w = 5\sqrt{(\cos\varphi-3)^2 + (\sin\varphi-4)^2} + 12\sqrt{(\cos\varphi+3)^2 + (\sin\varphi+4)^2}.$$

Hay

$$w = 5\sqrt{26 - 6\cos\varphi - 8\sin\varphi} + 12\sqrt{26 + 6\cos\varphi + 8\sin\varphi}.$$

Đặt $t = 6\cos\varphi + 8\sin\varphi$, chú ý $-10 \leqslant t \leqslant 10$, ta thu được

$$f(t) = 5\sqrt{26-t} + 12\sqrt{26+t}, \quad -10 \leqslant t \leqslant 10.$$

Ta có

$$f'(t) = -\frac{5}{2\sqrt{26-t}} + \frac{6}{\sqrt{26+t}}.$$

Giải phương trình $f'(t) = 0$, ta được $t = \frac{238}{13}$. Giá trị này không thoả điều kiện $-10 \leqslant t \leqslant 10$. Mặt khác, $f(-10) = 78$, $f(10) = 92$.

- Giá trị lớn nhất của $f(t)$, cũng là giá trị lớn nhất của $w$ là 92, đạt được tại $t = 10$. Để tìm số phức $z$, ta giải hệ
$$\begin{cases} 6\cos\varphi + 8\sin\varphi = 10, \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5}, \\ \sin\varphi = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$
Số phức $z$ là $z = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

- Giá trị nhỏ nhất của $f(t)$, cũng là giá trị nhỏ nhất của $w$ là 78, đạt được tại $t = -10$. Để tìm số phức $z$, ta giải hệ
$$\begin{cases} 6\cos\varphi + 8\sin\varphi = -10, \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = -\frac{3}{5}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$
Số phức $z$ là $z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$.

$\diamondsuit$

**Bài tập 6.** Cho số phức $z$ có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

1) $w = 4|z+1| + 3|z-1|$.

   Đáp số. $\max w = 10$, tại $z = \dfrac{7}{25} - \dfrac{24}{25}i$, $\min w = 6$, tại $z = -i$.

2) $w = 5|z-i| + 12|z+i|$.

   Đáp số. $\max w = 26$, tại $z = -\dfrac{120}{169} + \dfrac{119}{169}i$, $\min w = 10$, tại $z = -i$.

3) $w = 5|z-i| - 12|z+i|$.

   Đáp số. $\max w = 10$, tại $z = -i$, $\min w = -24$, tại $z = i$.

4) $w = 3|z+5-12i| + 4|z-5+12i|$. Đáp số. $90 \leqslant w \leqslant 92$.

   Đáp số. $\max w = 92$, tại $z = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i$, $\min w = 90$, tại $z = \dfrac{5}{13} - \dfrac{12}{13}i$.

5) $w = 2|z+5+12i| + 3|z-5-12i|$.

   Đáp số. $\max w = 66$, tại $z = -\dfrac{5}{13} - \dfrac{12}{13}i$, $\min w = 64$, tại $z = \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i$.

**Tính chất 1.16**

*Cho $(\mathscr{C})$ là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và $M$ là điểm trên $(\mathscr{C})$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng*
$$S = AM + BM + CM + DM.$$

**Ví dụ 1.39**

Cho số phức $z$ thoả mãn điều kiện $|z-5-i|=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng
$$S=|z-1+2i|+|z-2-5i|+|z-8+3i|+|z-9-4i|.$$

**Tính chất 1.17**

*Với hai số phức $z_1$, $z_2$ tuỳ ý, ta có*

1) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|\right)^2$;

2) $(|z_1|+|z_2|)^2 \leqslant |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $|z_1|=|z_2|$.

*Chứng minh.* Đặt $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. Gọi $M(a,b)$, $N(c,d)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho $z_1$ và $z_2$. Ta có $|z_1|=OM$, $|z_2|=ON$.

Ta có
$$z_1+z_2=a+c+(b+d)i.$$
Gọi $C(a+c,b+d)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_1+z_2$. Khi đó, $|z_1+z_2|=OC$.

Mặt khác
$$z_1-z_2=a-c+(b-d)i.$$
Để ý rằng $\overrightarrow{NM}=(a-c,b-d)$, nên $|z_1-z_2|=MN$. Ta có $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$, nên tứ giác $OMCN$ là hình bình hành. Do đó
$$OC^2+MN^2=2(OM^2+ON^2), \tag{1.5}$$
hay
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|)^2.$$
Mặt khác, ta có
$$(OM+ON)^2 \leqslant 2(OM^2+ON^2). \tag{1.6}$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON$.

Từ (1.5) và (1.6), suy ra
$$(OM+ON)^2 \leqslant OC^2+MN^2,$$
hay
$$(|z_1|+|z_2|)^2 \leqslant |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2.$$
□

***Lời bình.*** Ta có thể chứng minh đẳng thức
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|\right)^2.$$

như sau:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2\\ &= 2(a^2+b^2+c^2+d^2)\\ &= 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\end{aligned}$$

♣

**Ví dụ 1.40**

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$ thoả

$$|z-3-4i|^2+|z+3+4i|^2=150.$$

***Lời giải.*** Đặt $z_1=3+4i$. Giả thiết đã cho được viết lại thành

$$|z-z_1|^2+|z+z_1|^2=150.$$

Tương đương

$$2\left(|z_1|^2+|z|^2\right)=150 \Leftrightarrow 2\left(25+|z|^2\right)=150 \Leftrightarrow |z|^2=50.$$

Vậy tập hợp cần tìm là đường tròn có tâm là gốc toạ độ, bán kính $R=5\sqrt{2}$. ♢

**Ví dụ 1.41**

Cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$ và số thực $k$ thoả $k>\dfrac{|z_1-z_2|^2}{2}$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$ thoả

$$|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=k.$$

***Lời giải.*** **Cách 1.** Gọi $M$, $A$, $B$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z$, $z_1$, $z_2$. Từ giả thiết dẫn đến

$$AM^2+BM^2=k.$$

Gọi $I$ là trung điểm đoạn $AB$. Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác $MAB$, ta có

$$IM^2=\frac{AM^2+BM^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}.$$

Từ đây, tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $I$, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{k}{2}-\dfrac{|z_1-z_2|^2}{4}}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\dfrac{z_1+z_2}{2}$, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{k}{2}-\dfrac{|z_1-z_2|^2}{4}}$.

**Cách 2.** Đặt
$$t=\frac{(z-z_1)+(z-z_2)}{2}=z-\frac{z_1+z_2}{2},$$
hay
$$z=t+\frac{z_1+z_2}{2}.$$
Ta có
$$z-z_1=t+\frac{z_1+z_2}{2}-z_1=t-\frac{z_1-z_2}{2},$$
$$z-z_2=t+\frac{z_1+z_2}{2}-z_2=t+\frac{z_1-z_2}{2}.$$
Từ giả thiết, ta có
$$\left|t-\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2+\left|t+\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2=k.$$
Dẫn đến,
$$2\left(|t|^2+\left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|\right)^2=k.$$
Suy ra
$$|t|^2=\frac{k}{2}-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}.$$
Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $t$ là đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính $R=\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}}$. Mà $z=t+\frac{z_1+z_2}{2}$, nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\frac{z_1+z_2}{2}$, bán kính $R=\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}}$. ♢

**Bài tập 7.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$, biết rằng

1) $|z-4|^2+|z+4|^2=40$; Đáp số. $x^2+y^2=4$.

2) $|z-2i|^2+|z+2|^2=12$; Đáp số. $(x+1)^2+(y-1)^2-4=0$.

3) $|z-6|^2+|z+8i|^2=68$; Đáp số. $(x-3)^2+(y+4)^2-9=0$.

4) $|z-2|^2+|z+2|^2=26$; Đáp số. $x^2+y^2=9$.

5) $|z-\mathrm{i}|^2+|z+3|^2=13$. Đáp số. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-4=0$.

**Ví dụ 1.42: (Thi thử lần III, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nôi, 2016 – 2017)**

Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ thoả mãn
$$|z_1-z_2|=1,\quad |z_1+z_2|=3.$$
Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$.

**Ví dụ 1.43: (Thi thử lần IV, Đại học Vinh, 2016 – 2017)**

Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ thoả mãn

$$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1.$$

Tính $|z_1 + z_2|$.

**Ví dụ 1.44: (Thi thử lần II, Đại học Vinh, 2017 – 2018)**

Cho $z_1$, $z_2$ là hai trong số các số phức thoả mãn $|z-1+2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

## 1.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

**Ví dụ 1.45: (Thi thử lần II, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2017 – 2018)**

Có bao nhiêu số phức $z$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: $\left|z - 10 + 2i\right| = \left|z + 2 - 14i\right|$ và $\left|z - 1 - 10i\right| = 5$?

***Lời giải***. Gọi $M(x;y)$ biểu diễn cho $z$, ta có hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0, \\ (x-1)^2 + (y-10)^2 = 25. \end{cases}$$

Để ý đường thẳng $3x - 4y + 12 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2 + (y-10)^2 = 25$, nên chỉ có một số phức. ♢

**Ví dụ 1.46**

Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ đồng thời thoả mãn hai điều kiện:

$$|z - 1| = \sqrt{34}, \qquad |z + 1 + mi| = |z + m + 2i|,$$

trong đó, $m \in \mathbb{R}$ và sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất. Khi đó, giá trị của $|z_1 + z_2|$ là bao nhiêu?

## 1.3 Bài tập

**Bài tập 8.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$, biết rằng:

1) $|z + \mathrm{i} + 1| = |\overline{z} - 3\mathrm{i}|$; Đáp số. $2x - 4y - 7 = 0$.

2) $|z-2+\mathrm{i}| = |\overline{z}+1-3\mathrm{i}|$; Đáp số. $6x+4y+5=0$.

3) $\left|\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-5\mathrm{i}+1}\right| = 1$. Đáp số. $2x-12y+25=0$.

**Bài tập 9.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$, biết rằng:

1) $z\cdot\overline{z}+(1+i)\cdot\overline{z}+(1-i)z+1=0$; Đáp số. $(x+1)^2+(y+1)^2-1=0$.

2) $z\cdot\overline{z}+(2+i)\cdot\overline{z}+(2-i)z=4$; Đáp số. $(x+2)^2+(y+1)^2-9=0$.

3) $z\cdot\overline{z}+(3+i)\cdot\overline{z}+(3-i)z=6$. Đáp số. $(x+3)^2+(y+1)^2-16=0$.

**Bài tập 10.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $z$, biết rằng:

1) $|2z+\mathrm{i}| = |-z+\mathrm{i}+3|$; Đáp số. $(x+1)^2+(y+1)^2-5=0$.

2) $|z+3-2\mathrm{i}| = |2z-2\mathrm{i}+1|$; Đáp số. $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{29}{9}=0$.

3) $\left|\dfrac{3z+2+3\mathrm{i}}{2z+\mathrm{i}-1}\right| = 1$. Đáp số. $\left(x+\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{5}\right)^2-\dfrac{58}{25}=0$.

**Bài tập 11.** Cho số phức $z$ thoả mãn điều kiện cho trước. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w$, biết rằng

1) $|z+1-2\mathrm{i}|=1,\quad w+z=-2-5\mathrm{i}$; Đáp số. $(x+1)^2+(y+7)^2=1$.

2) $|z+2+5\mathrm{i}|=3,\quad w-z=1+2\mathrm{i}$; Đáp số. $(x+1)^2+(y+3)^2=9$.

3) $|z+3-2\mathrm{i}|=4,\quad w=\mathrm{i}z+2$; Đáp số. $x^2+(y+3)^2=16$.

4) $|z+1-3\mathrm{i}|=2,\quad 2w-z=-2+3\mathrm{i}$. Đáp số. $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=16$.

**Bài tập 12.** Cho số phức $z$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w$, biết rằng

1) $w=\mathrm{i}z+2i-1,\quad |z-2\mathrm{i}|\leqslant 2$;

Đáp số. Hình tròn $(x+3)^2+(y-2)^2\leqslant 4$.

2) $w=\mathrm{i}\overline{z}+3-2\mathrm{i},\quad |z+2\mathrm{i}+4|\leqslant 3$;

Đáp số. Hình tròn $(x-1)^2+(y+6)^2\leqslant 9$.

3) $w=\mathrm{i}z+3-\mathrm{i},\quad |2z+\mathrm{i}|^2\geqslant 4$;

Đáp số. $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+(y+1)^2-1\geqslant 0$.

4) $w=2z+3-\mathrm{i},\quad |2z+\mathrm{i}|^2-z\cdot\overline{z}-1\leqslant 0$.

Đáp số. $(x-3)^2+\left(y+\dfrac{7}{3}\right)^2\leqslant\dfrac{16}{9}$.

**Bài tập 13.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $z$, biết rằng

1) $|z+3\mathrm{i}| = |z+2\overline{z}+2\mathrm{i}|$; Đáp số. Parabol $y = \dfrac{1}{10}\left(8x^2-5\right)$.

2) $|5z+\mathrm{i}+1| = |2z-3\overline{z}+2\mathrm{i}|$; Đáp số. Parabol $y = \dfrac{1}{5}\left(12x^2+5x-1\right)$.

3) $|z+\mathrm{i}-2| = |2z+\overline{z}+1|$. Đáp số. Parabol $y = 4x^2+5x-2$.

4) $|z-\mathrm{i}| = |2z-3\overline{z}+2\mathrm{i}|$. Đáp số. Hai đường thẳng $y = -\dfrac{3}{4} \vee y = -\dfrac{1}{6}$.

**Bài tập 14.** Tìm số phức $z$ có modul nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

1) $|z+3\mathrm{i}+4| = |z-5\mathrm{i}+10|$. Đáp số. $z = -3+4\mathrm{i}$.

2) $|z-3\mathrm{i}+4| = |z+5\mathrm{i}+10|$; Đáp số. $z = -3-4\mathrm{i}$.

3) $|z+2+\mathrm{i}| = |\overline{z}+5+2\mathrm{i}|$; Đáp số. $z = -2+2\mathrm{i}$.

4) $|z+2\mathrm{i}-3| = |\overline{z}-\mathrm{i}-8|$; Đáp số. $z = 5+\mathrm{i}$.

5) $|z+3\mathrm{i}+2| = |z-\mathrm{i}+8|$. Đáp số. $z = -3+2\mathrm{i}$.

**Bài tập 15.** Tìm số phức $z$ có modul nhỏ nhất, lớn nhất biết rằng

1) $|z-3\mathrm{i}+4| = 5$; Đáp số. $z = 0$, $z = -8+6\mathrm{i}$.

2) $|z-3\mathrm{i}-4| = 10$; Đáp số. $z = -3-4\mathrm{i}$, $z = 9+12\mathrm{i}$.

3) $|z-5+12\mathrm{i}| = 39$; Đáp số. $z = -10+24\mathrm{i}$, $z = 20+48\mathrm{i}$.

4) $|z-\mathrm{i}+1| = 2\cdot\sqrt{2}$; Đáp số. $z = 1-\mathrm{i}$, $z = -3+3\mathrm{i}$.

5) $|z-2-2\mathrm{i}| = 4\cdot\sqrt{2}$; Đáp số. $z = -2-2\mathrm{i}$, $z = 6+6\mathrm{i}$.

6) $|z-2+2\mathrm{i}| = \sqrt{2}$; Đáp số. $z = 1-\mathrm{i}$, $z = 3-3\mathrm{i}$.

7) $|z+4+4\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Đáp số. $z = -3-3\mathrm{i}$, $z = -5-5\mathrm{i}$.

**Bài tập 16.** Cho số phức $z$ thoả mãn $|z+\mathrm{i}| = 3$. Biết tập hợp biểu diễn của số phức $w = (3+4\mathrm{i})z-2\mathrm{i}$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Đáp số. 15.

**Bài tập 17.** Cho số phức $z$ thoả mãn $|z-1+\mathrm{i}| = 7$. Biết tập hợp biểu diễn của số phức $w = (3+4\mathrm{i})z$ là một đường tròn. Xác định tâm và bán kính đường tròn đó.

Đáp số. Tâm $I(7;1)$, $R = 35$.

**Bài tập 18.** Xét số phức $z$ thoả mãn

$$|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}.$$

Gọi $m$, $M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $m+M$.

Đáp số. $\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

# Chương 2

# Tiếp tuyến

## 2.1 Hàm phân thức

**Ví dụ 2.1**

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad - bc \neq 0$ và $c \neq 0$. Biện luận số tiếp tuyến đi qua điểm $M(m,n)$ đối với đồ thị $(\mathscr{C})$.

***Lời giải***. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $M(m,n)$ với hệ số góc $k$. Phương trình $\Delta$ có dạng

$$y = k(x-m) + n.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d} = k(x-m)+n, & (2.1a) \\ \dfrac{ad-bc}{(ax+b)^2} = k. & (2.1b) \end{cases}$$

Thay $k$ từ phương trình (2.1b) vào phương trình (2.1a), ta thu được phương trình

$$\frac{c(a-cn)x^2 + 2c(b-d)x + adm - bcm - d^2n + bd}{(cx+d)^2} = 0. \tag{2.2}$$

Với điều kiện $cx + d \neq 0$, (2.2) tương đương với

$$c(a-cn)x^2 + 2c(b-d)x + adm - bcm - d^2n + bd = 0. \tag{2.3}$$

Biệt thức của (2.3) là

$$\Delta = -4c(ad-bc)(b+am-dn-cmn).$$

Để ý rằng (2.3) có nghiệm là $-\dfrac{d}{c}$ khi và chỉ khi

$$\frac{(ad-bc)(d+cm)}{c} = 0 \Leftrightarrow d + cm = 0.$$

Ta có các khả năng sau:

1) Qua $M$ vẽ được hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi (2.3) có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$. Hay

$$\begin{cases} c(a-cn)\neq 0, & (2.4a)\\ d+cm\neq 0, & (2.4b)\\ -c(ad-bc)(b+am-dn-cmn)>0. & (2.4c)\end{cases}$$

- (2.4a) có nghĩa là $M$ không thuộc tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$.
- Từ (2.4b) suy ra $M$ không thuộc tiệm cận đứng của $(\mathscr{C})$.
- Từ (2.4c), ta lại xét hai khả năng xảy ra.
  - Nếu $ad-bc>0$, tức hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định, khi đó

$$b+am-dn-cmn<0 \Leftrightarrow am+b<n(cm+d),$$

    tương đương

$$\begin{cases} cm+d>0,\\ \dfrac{am+b}{cm+d}<n \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} cm+d<0,\\ \dfrac{am+b}{cm+d}>n. \end{cases}$$

    Điều này có nghĩa là, nếu $M$ nằm ở bên phải của tiệm cận đứng, thì $M$ phải nằm phía dưới nhánh đồ thị của $(\mathscr{C})$ ở bên phải của tiệm cận đứng hoặc nếu $M$ nằm ở bên trái của tiệm cận đứng, thì $M$ phải nằm phía trên nhánh đồ thị của $(\mathscr{C})$ ở bên trái của tiệm cận đứng.

2) Qua $M$ vẽ được một tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi (2.3) có đúng một nghiệm phân khác $-\frac{d}{c}$.

◊

**Ví dụ 2.2**

Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$. Biện luận số tiếp tuyến đi qua điểm $M(a,b)$ đối với đồ thị $(\mathscr{C})$.

***Lời giải***. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $M(a,b)$ với hệ số góc $k$. Phương trình $\Delta$ có dạng

$$y=k(x-a)+b.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}=k(x-a)+b, & (2.5a)\\ \dfrac{2}{(x+1)^2}=k. & (2.5b)\end{cases}$$

Thay $k$ từ phương trình (2.5b) vào phương trình (2.5a), ta thu được phương trình

$$(b-1)x^2+2(b+1)x+1-2a+b=0. \qquad (2.6)$$

Số tiếp tuyến đi qua $M$ cũng là số nghiệm khác $-1$ của phương trình (2.6).

Để ý rằng định thức của (2.6) là

$$\Delta = 8(1 - a + b + ab)$$

và $x = -1$ là nghiệm của (2.6) khi và chỉ khi $a = -1$. Các khả năng xảy ra như sau:

- (2.6) có hai nghiệm phân biệt khác $-1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b - 1 \neq 0, \\ a \neq -1, \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1, \\ a \neq -1, \\ b(a+1) > a - 1. \end{cases}$$

  Điều này tương đương với

$$\begin{cases} b \neq 1, \\ a > -1, \\ b > \dfrac{a-1}{a+1} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} b \neq 1, \\ a < -1, \\ b < \dfrac{a-1}{a+1}. \end{cases}$$

  Hệ thứ nhất có nghĩa là $M$ không nằm trên tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$ $(b \neq 1)$, và nếu $M$ nằm phía bên phải của đường tiệm cận đứng $(a > -1)$, thì $M$ phải nằm phía trên của $(\mathscr{C})$ $\left(b > \dfrac{a-1}{a+1}\right)$.

  Hệ thứ hai có nghĩa là $M$ không nằm trên tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$ $(b \neq 1)$, và nếu $M$ nằm phía bên trái của đường tiệm cận đứng $(a < -1)$, thì $M$ phải nằm phía dưới của $(\mathscr{C})$ $\left(b < \dfrac{a-1}{a+1}\right)$.

  Từ những điều trên, ta có kết quả là, qua $M$ kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $M$ thuộc miền không bị gạch và không thuộc hai đường tiệm cận của $(\mathscr{C})$.

- Trường hợp 2. Phương trình (2.6) có đúng một nghiệm khác $-1$.

  - (2.6) là phương trình bậc hai và có nghiệm kép khác $-1$

$$\begin{cases} b - 1 \neq 0, \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1, \\ b(a+1) = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1, \\ b = \dfrac{a-1}{a+1} \end{cases}$$

    Hệ sau cùng có nghĩa $M$ không thuộc tiệm cận ngang và $M$ thuộc $(\mathscr{C})$.

    Ta chỉ cần $M$ thuộc $(\mathscr{C})$ là đương nhiên $M$ không thuộc tiệm cận ngang.

  - (2.6) có hai nghiệm phân biệt, trong đó, có một nghiệm là $-1$.

$$\begin{cases} b \neq 1, \\ b(a+1) > a - 1, \\ a = -1. \end{cases}$$

    Điều này có nghĩa $M$ thuộc đường tiệm cận đứng của $(\mathscr{C})$ nhưng không trùng với giao điểm của hai tiệm cận.

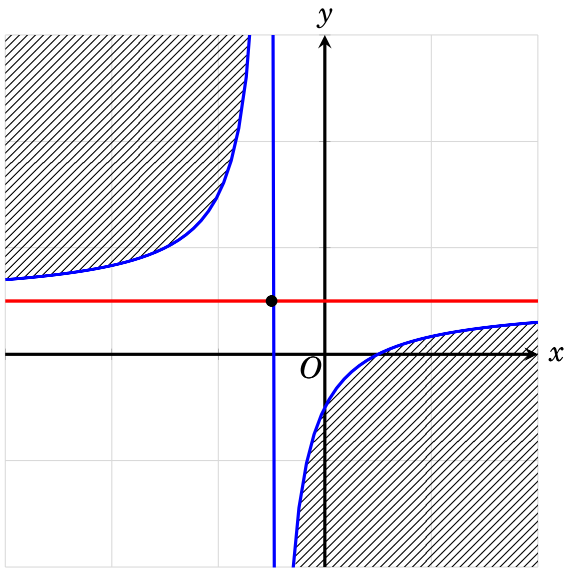
– (2.6) là phương trình bậc nhất và có nghiệm khác $-1$. Dẫn đến

$$\begin{cases} b = 1, \\ a \neq -1. \end{cases}$$

Điều này có nghĩa $M$ thuộc đường tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$ nhưng không trùng với giao điểm của hai tiệm cận.

Từ những điều trên, suy ra rằng, qua $M$ kẻ được đúng một tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $M$ thuộc $(\mathscr{C})$ hoặc $M$ thuộc một trong các đường tiệm cận của $(\mathscr{C})$ nhưng không trùng với giao điểm của hai tiệm cận.

- Qua $M$ không kẻ được tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $M$ thuộc miền bị gạch hoặc $M$ trùng với giao điểm của hai tiệm cận.




♢

***Lời bình***. Kết quả trên cũng đúng cho hàm số có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. ♣

**Ví dụ 2.3**

Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$ và điểm $A(a;1)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của $a$ để có đúng một tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ qua $A$. Tính tổng giá trị các phần tử của $S$.

***Lời giải***. $(\mathscr{C})$ có phương trình tiệm cận đứng là $x = 1$ và phương trình tiệm cận ngang là $y = -1$. Điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ có phương trình $y = 1$, $\Delta$ song song với tiệm cận ngang.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $A$ là giao điểm của đồ thị $(\mathscr{C})$ và $\Delta$ hoặc $A$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và $\Delta$.

- Hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \dfrac{-x+2}{x-1}, \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Do đó, toạ độ giao điểm của đồ thị $(\mathscr{C})$ và $\Delta$ là $\left(\dfrac{3}{2};1\right)$.

- Dễ thấy, toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và $\Delta$ là $(1,1)$.

Như vậy, $a = \dfrac{3}{2}$ hoặc $a = 1$. Do đó, $S = \left\{\dfrac{3}{2}, 1\right\}$. Tổng các phần tử của $S$ là $\dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$. ♢

**Ví dụ 2.4**

Cho hàm số $y = \dfrac{-x-7}{x+1}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$.

1) Tìm toạ độ các điểm trên đường thẳng $\Delta : y = 2x + 9$ mà từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$.

2) Có bao nhiêu điểm thuộc đường tròn có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

mà từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$?

***Lời giải.*** 1) $(\mathscr{C})$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -1$. Giao điểm hai tiệm cận là $I(-1,-1)$ không thuộc $\Delta$. Các điểm cần tìm chính là giao điểm của $\Delta$ và $(\mathscr{C})$ và các tiệm cận.

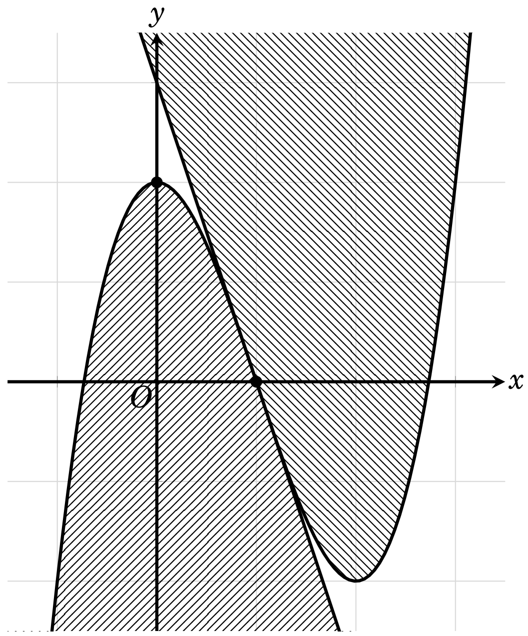
Đáp số. $\{(-4,1),(-2,5),(-1,7),(-5,-1)\}$.

2) Đáp số.

$$\{(-4,1),(-2,5),(1,-4),(5,-2),(1-\sqrt{21},-1),(1+\sqrt{21},-1),(-1,1-\sqrt{21}),(-1,1+\sqrt{21})\}.$$

♢

## 2.2 Hàm bậc ba




Ta có kết quả sau: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$ và $\Delta : y = 3 - 3x$ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm uốn (điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng sao cho từ đó có thể kẻ được

- một tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ là miền bị gạch và điểm uốn của $(\mathscr{C})$;
- hai tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ là những điểm nằm trên $(\mathscr{C})$ hoặc những điểm nằm trên $\Delta$ nhưng không kể điểm uốn của $(\mathscr{C})$;
- ba tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ là những điểm thuộc miền không bị gạch.

**Ví dụ 2.5**

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$.

1) Qua điểm $P(-2, -18)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$?

2) Tìm những điểm trên đường thẳng $(\ell) : y = 4x + 2$ mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$.

***Lời giải***. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Nghiệm của phương trình $y'' = 0$ là $x = 1$. Khi đó, $y = 0$. Điểm uốn của $(\mathscr{C})$ là $A(1,0)$.

Tiếp tuyến $\Delta$ tại $A(1,0)$ có phương trình là

$$y = y'(1)(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = 3 - 3x.$$

1) Để ý điểm $P$ thuộc $(\mathscr{C})$ và không là điểm uốn của $(\mathscr{C})$, nên qua $A$ có hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$.

2) Đường thẳng $(\ell)$ không đi qua điểm điểm uốn của $(\mathscr{C})$, nên tập hợp những điểm cần tìm là giao điểm của $(\ell)$ và $(\mathscr{C})$ hoặc giao điểm của $(\ell)$ và $\Delta$.

   Phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = 4x + 2$ có ba nghiệm là $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 4$ và phương trình $4x + 2 = 3 - 3x$ có nghiệm là $x = \dfrac{1}{7}$.

   Vậy có bốn điểm trên đường thẳng $(\ell)$ mà từ mỗi điểm đó kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$.

$\diamondsuit$

Đồng Nai, năm học 2018 – 2019,
Sắp chữ bằng LaTeX bởi Trần Văn Toàn,
Giáo viên trường THPT chuyên Lương Thế Vinh,
Biên Hoà, Đồng Nai.